UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Un análisis completo del artículo de Riemann “Sobre la cantidad de números primos menores que una magnitud dada”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMATICO

P R E S E N T A :

ALEJANDRO DE LAS PEÑAS CASTAÑO

DIRECTOR DE TESIS:
Mat. Julio César Guevara Bravo

2016

Un Análisis Completo Del Artículo De Riemann “Sobre la cantidad de números primos menores que una magnitud dada”

Alejandro De Las Peñas Castaño

9 de junio de 2016

,

Índice general

0.1. Introducción

En la historia de las matemáticas existen pocos trabajos que sean tan fascinantes y enigmáticos pero a la vez tan vigentes, para que la comunidad de investigadores en las matemáticas siga acercándose a ellos. Uno de estos casos es el gran trabajo que publicó Bernhard Riemann en 1859, con el título *Sobre la cantidad de números primos menores que una magnitud dada*".[1] Su fama se debe en gran medida a que de él se extrajo –un pasaje pequeño– lo que ahora identificamos como la "Hipótesis de Riemann". No es necesario documentar la afirmación de que la Hipótesis aún sigue sin resolverse, y esto sucede a pesar de que este problema ya forma parte de la cultura popular matemática y en particular de la teoría de los números.

A pesar de que no se tiene una prueba de esta parte del artículo -la Hipótesis-, las matemáticas que se han desarrollado para entender y completar esto han proporcionado avances muy importantes en la teoría de los números y en el análisis complejo, pero nada ha sido suficiente para poder resolver ese problema abierto y famoso.

El principal objetivo del artículo es encontrar una función (analítica) que "cuente" la cantidad de números primos menores que una cantidad x. Actualmente a esa función se conoce como la función contadora de primos y convencionalmente se denota con $\pi(x)$. Este problema fue uno de los más grandes de la teoría de los números durante mucho tiempo porque conocer una expresión algebraica (o en este caso analítica) para $\pi(x)$ efectivamente permite encontrar números primos; la función $n \mapsto p_n$, donde p_n es el n-ésimo número primo, se puede pensar como la "función inversa" de $\pi(x)$.

El estudio que hace Riemann sobre $\pi(x)$, que él simplemente denota por $F(x)$, produjo una gran cantidad de avances matemáticos porque Riemann dejó muchas pruebas incompletas o de plano no las escribió, incluso cuando las pruebas eran necesarias. Existen partes donde da la impresión que él mismo minimiza algunas de sus aportaciones y lo hace ver como que sólo son partes de un proceso operativo –como en su manejo de la inversión de Fourier o cuando aproxima la cantidad de ceros de la función zeta–, y por lo mismo ya no profundizó en los detalles. Uno podría especular sobre porqué Riemann dejó partes de su artículo inconclusas, pero lo que sí es cierto es que fundamentar este trabajo produjo grandes avances matemáticos muchos años después. La redacción y las ideas que usa Riemann (con una facilidad impresionante) hacen que el artículo sea complicado de leer, de hecho, la comunidad matemática tardó *más de treinta años* en poder construir una teoría matemática sobre el artículo de Riemann.[2]

El estudio de $\pi(x)$ culmina en la demostración del "Teorema fundamental de los números primos" que dice que $\pi(x)$ es de orden $x(\log x)^{-1}$ cuando $x \to \infty$. Este sorprendente teorema fue demostrado, independientemente, por los matemáticos Hadamard [9] y de la Vallée Poussin [3], ambos en 1896. Antes, en 1893, Hadamard demostró formalmente un paso fundamental para deducir la fórmula que había dado Riemann para $\pi(x)$ al desarrollar una bellísima teoría de las funciones enteras [8]. Dos años después, von Mangoldt terminó de demostrar la fórmula para $\pi(x)$ [14].

Las matemáticas que se desarrollaron para completar el artículo de Riemann fueron avances muy importantes en la teoría de los números pero ninguna fue suficiente para resolver el problema abierto que dejó Riemann: su hipótesis. Sigue sin resolverse a pesar de ser uno de los problemas que propuso Hilbert en 1902 como los problemas más importantes del siglo XX.

Al margen de los grandes especialistas que retomaron las ideas vertidas en el artículo, la realidad es que popularmente a éste se le conoce principalmente por dos temas: la definición de la función zeta y la mencionada, desde el inicio, "Hipótesis de Riemann". Entonces, la increíble fama de dos resultados eclipsaron la riquísima fuente de conocimiento matemático que Riemann dejó latentes, pero a plena vista, en todo su artículo. De hecho, la "Hipótesis" es sólo un comentario sin ninguna justificación, es decir, no hay argumentos en el texto que remotamente sugieran que sea cierta o no esa conjetura, es más, el propio Riemann lo admite inmediatamente después de decirlo: "... it appears unnecessary for the next objective of my investigation".

Después de estudiar con gran cuidado el artículo, nos percatamos que cada renglón está saturado de ideas y métodos matemáticos muy ingeniosos. Ha sido fascinante percibir la increíble y hasta profética intuición matemática que tenía Riemann. Lo importante, y ultimadamente lo más enriquecedor, es entender los procesos mentales que llevaron a Riemann a escribir su artículo. Leer cuidadosamente y entender el trabajo fue lo que llevó a Hadamard, von Mangoldt, de la Vallée Poussin y muchos más a grandes

[1] El título original en alemán es "*Ueber die Anzal der Primzahlen unter einer gegbenen Grósse*".

[2] Riemann muere en 1866 a los 39 años apenas siete años después de publicar su artículo.

resultados en la teoría de números e incluso en otras ramas de las matemáticas (como Hadamard y su estudio de las funciones enteras).

0.1.1. Objetivo de la tesis

El propósito de este trabajo de tesis es estudiar de manera organizada y minuciosa el artículo original de Riemann, pero desde la matemática de su entorno histórico y no desde las teorías actuales. Tratamos de hacer el estudio acompañado de algunas de las lecturas del propio Riemann, como los trabajos de Euler, por mencionar a uno.

La dinámica de la tesis es directa: el artículo de Riemann está anexado como apéndice y se presenta con los renglones enumerados. Esto permite un estudio ordenado porque facilita hacer referencias muy precisas. Las ecuaciones del artículo vienen enumeradas de la forma A.i (la 'A' se refiere a 'apéndice').

En el capítulo 1, los preliminares, se estudian las herramientas matemáticas que usó Riemann para su artículo y se estudia el contexto histórico de ellas para situar el artículo de Riemann en las matemáticas de mediados del siglo XIX. En dos secciones de estos preliminares, se extrae un fragmento del artículo para estudiarlo independientemente del flujo natural del mismo. La razón por la cual se hace esto es porque estos fragmentos son puramente técnicos y tener un entendimiento de éstos *a priori* permitirá una lectura más fluida del artículo de Riemann. Por lo tanto es muy recomendable leer los preliminares –incluso si los temas expuestos ahí ya son conocidos– porque son parte esencial del estudio histórico y matemático del artículo de Riemann.

En el capítulo 2 se lee el artículo de corrido con un desglosamiento exhaustivo de las ideas matemáticas de Riemann. Muchas veces se formalizan las demostraciones que él da o se interpretan (con argumentos matemáticos) los resultados y comentarios que escribe él.

Por último, este artículo es de los más importantes en la teoría de los números y, sin exagerar, es una *opus magnum* de la creatividad matemática. Ante este escenario tan motivador sólo faltaba sentarse a estudiar y escribir sobre este artículo, y sin duda trabajar con esta fuente original ha sido muy enriquecedor. Uno de los objetivos de esta tesis es quitar un poco de misterio de la complicada redacción que envuelve al artículo de Riemann y hacerlo más legible, para que alguien que no necesariamente se dedique a esta rama de las matemáticas, disfrute y conozca las ideas originales del gran maestro Bernhard Riemann.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. La función factorial

Consideramos que no sería adecuado omitir el contexto histórico de las matemáticas que influyeron en el trabajo de Riemann ya que conocer las fuentes originales matemáticas que retomó de otros matemáticos permite entender el génesis de las piezas fundamentales sobre las que levantó su gran entramado de los números primos.

Generalmente es complicado tratar de establecer un punto de partida que nos indique cuándo se empezó a gestar una teoría matemática, pero en el caso del artículo de Riemann afortunadamente sí podemos ubicar el punto de inicio, éste es Leonhard Euler y su famosa relación

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

donde $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ corre sobre todos los números primos. De hecho, este no es el único resultado de Euler en el que se basó Riemann para construir su función $\zeta(s)$. Antes de estudiar la relación anterior, repasaremos el otro resultado de Euler: la extensión de la función factorial, $n!$, a los números reales y después a los números complejos.

En la primera carta de la correspondencia de Leonhard Euler a Christian Goldbach[1] [7] en 1729, Euler le escribe sobre una de las ideas que había estado trabajando para interpolar la función factorial a valores fraccionarios o irracionales, como $(1/2)!$ o $\sqrt{2}!$.

Le menciona a Goldbach que se cumple el 'producto infinito':

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2}\right]\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{3}{n+3}\right]\cdots = n!.$$

Se puede ver, –sin considerar por un momento cuestiones de convergencia– que sí es cierto:

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2}\right]\cdots &= \left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right]\cdots\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n}{n+n}\right]\left[\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \frac{n+1}{n+n+1}\right]\cdots \\ &= n!\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right]\cdots\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n+n}\right]\left[\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \frac{n+1}{n+n+1}\right]\cdots\end{aligned}$$

aquí tenemos un producto telescópico del lado derecho de $n!$. Lo que vió Euler en este producto fue que n se podía sustituir por cualquier real que no fuera un entero negativo para que no se anulara el denominador. Ahora lo escribiremos en términos más actuales como:

$$s! = \lim_{N\to\infty} \frac{N!}{(s+1)(s+2)\cdots(s+N)}(N+1)^s. \tag{1.1.1}$$

[1] El mismo de la famosa "conjetura de Goldbach" que aparece en otra carta, del año 1742, como una posdata.

Esta expresión no es una fórmula sencilla para $s!$, entonces Euler, por la recomendación de Goldbach, dedujo una expresión integral para la función factorial [5, E019], es decir, construyó una expresión de la forma $n! = \int f(x,n)dx$. Empezó con la integral

$$\int_0^1 x^y (1-x)^n dx$$

con y cualquier real que no sea un entero negativo.[2] Después usó el teorema del binomio y expandió $(1-x)^n$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^y(1-x)^n dx &= \int_0^1 x^y \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-x)^k dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k \int_0^1 x^{y+k}dx \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k \left[\frac{x^{y+k+1}}{y+k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{y+k+1}.\end{aligned}$$

De aquí concluye que la última suma es

$$\int_0^1 x^y(1-x)^n dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{y+k+1} = \frac{n!}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)}.$$

Euler deduce la última igualdad a partir de la suma con coeficientes binomiales. De hecho Euler sólo argumenta la última igualdad sin demostrarla. Esto nos da el lujo de escoger un método más sencillo para demostrar

$$\int_0^1 x^y(1-x)^n dx = \frac{n!}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)}. \tag{1.1.2}$$

En lugar de usar las propiedades de los coeficientes binomiales, usamos integración por partes e inducción sobre n.

Para $n=0$, tenemos la integral elemental

$$\int_0^1 x^y dx = \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 = \frac{0!}{y+1}.$$

Ahora supongamos que 1.1.2 es válida para n, entonces si hacemos integración por partes obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^y(1-x)^{n+1}dx &= \left[(1-x)^{n+1}\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 + \frac{n+1}{y+1}\int_0^1 x^{y+1}(1-x)^n dx \\ &= \frac{n+1}{y+1}\int_0^1 x^{y+1}(1-x)^n dx,\end{aligned}$$

y por hipótesis de inducción tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^y(1-x)^{n+1}dx &= \frac{n+1}{y+1}\left(\frac{n!}{(y+2)(y+3)\cdots(y+n+2)}\right) \\ &= \frac{(n+1)!}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+2)}.\end{aligned}$$

Así, por inducción acabamos la demostración.

Como el objetivo de Euler es despejar $n!$, hace el cambio de variable $y = v/w$ en 1.1.2 y obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{\frac{v}{w}}(1-x)^n dx &= \frac{n!}{\left(\frac{v}{w}+1\right)\left(\frac{v}{w}+2\right)\cdots\left(\frac{v}{w}+n+1\right)} \\ &= \frac{n!}{\frac{1}{w^{n+1}}(v+w)(v+2w)\cdots(v+(n+1)w)} \\ &= \frac{w^{n+1}}{v+(n+1)w}\cdot\frac{n!}{(v+w)\cdots(v+nw)}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{v+(n+1)w}{w^{n+1}}\int_0^1 x^{\frac{v}{w}}(1-x)^n dx = \frac{n!}{(v+w)\cdots(v+nw)}. \tag{1.1.3}$$

[2] A esta integral actualmente se le conoce como “Integral Euleriana de primera clase”.

Enseguida, señala que si lográramos hacer $w = 0$ y $v = 1$, el lado derecho se reduce a $n!$ y acabaríamos por encontrar una fórmula para $n!$, pero el lado izquierdo se indeterminaría. Pero Euler exhibe que sí se puede llegar a algo útil cuando $w = 0$ y $v = 1$ (o en lenguaje moderno: tomar límites), y lo hace reescribiendo 1.1.3 con el cambio de variable $x = u^{w/(v+w)}$ con $dx = \frac{w}{v+w} u^{w/(v+w)-1} du$ donde

$$\frac{w}{v+w} - 1 = \frac{w - v - w}{v+w} = -\frac{v}{v+w}.$$

Así el lado izquierdo de 1.1.3 queda como

$$\begin{aligned}
&\frac{v+(n+1)w}{w^{n+1}} \int_0^1 x^{\frac{v}{w}} (1-x)^n dx \\
&= \frac{v+(n+1)w}{w^{n+1}} \int_0^1 \left(u^{\frac{w}{w+v}}\right)^{\frac{v}{w}} \left(1 - u^{\frac{w}{w+v}}\right)^n \frac{w}{v+w} u^{-\frac{v}{v+w}} du \\
&= \frac{v+(n+1)w}{w^{n+1}} \int_0^1 u^{\frac{v}{w+v}} \left(1 - u^{\frac{w}{w+v}}\right)^n \frac{w}{v+w} u^{-\frac{v}{v+w}} du \\
&= \frac{v+(n+1)w}{w^{n+1}} \left(\frac{w}{v+w}\right)^{n+1} \int_0^1 \left(\frac{w}{v+w}\right)^{-(n+1)} \left(1 - u^{\frac{w}{w+v}}\right)^n \frac{w}{v+w} du \\
&= \frac{v+(n+1)w}{(v+w)^{n+1}} \int_0^1 \left(\frac{w}{v+w}\right)^{-n} \left(1 - u^{\frac{w}{w+v}}\right)^n du.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{v+(n+1)w}{w^{n+1}} \int_0^1 x^{\frac{v}{w}} (1-x)^n dx = \frac{v+(n+1)w}{(v+w)^{n+1}} \int_0^1 \left(\frac{1-u^{w/(v+w)}}{w/(v+w)}\right)^n du. \tag{1.1.4}$$

Lo que quería hacer Euler con la ecuación 1.1.3 era que $w = 0$ y $v = 1$, es decir aislar el factorial:

$$\begin{aligned}
\lim_{w\to 0} \lim_{v\to 1} \frac{n!}{(v+w)(v+2w)\cdots(v+nw)} &= \lim_{w\to 0} \frac{n!}{(1+w)(1+2w)\cdots(1+nw)} \\
&= \frac{n!}{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)} = n!,
\end{aligned}$$

(observemos que el orden de los límites se plantea así porque éste es el que nos resulta más apropiado para las cuentas) entonces él aplica ambos límites a la ecuación 1.1.4:

$$\begin{aligned}
&\lim_{w\to 0} \lim_{v\to 1} \frac{v+(n+1)w}{(v+w)^{n+1}} \int_0^1 \left(\frac{1-u^{w/(v+w)}}{w/(v+w)}\right)^n du \\
&= \lim_{w\to 0} \frac{1+(n+1)w}{(1+w)^{n+1}} \int_0^1 \left(\frac{1-u^{w/(1+w)}}{w/(1+w)}\right)^n du \\
&= \lim_{w\to 0} \frac{1+(n+1)w}{(1+w)^{n+1}} \int_0^1 \left(\frac{1-u^{z}}{z}\right)^n du
\end{aligned}$$

donde $z = w/(1+w)$. Por lo tanto $w \to 0$ si y sólo si $z \to 0$.

Es importante mencionar que este último resultado, como el que enseguida desarrolla Euler, lo presentamos de una manera fiel a como lo hizo él en [5, E019], y es en este contexto que calculamos el límite sin ocuparnos de la convergencia. Hacer una demostración rigurosa sería innecesario para el propósito de ubicar históricamente el desarrollo de la función factorial en el artículo de Riemann.

Euler afirma que

$$\begin{aligned} n! &= \lim_{w\to 0}\lim_{v\to 1}\frac{v+(n+1)w}{(v+w)^{n+1}}\int_0^1\left(\frac{1-u^{w/(v+w)}}{w/(v+w)}\right)^n du \\ &= \lim_{w\to 0}\frac{1+(n+1)w}{(1+w)^{n+1}}\lim_{w\to 0}\int_0^1\left(\frac{1-u^z}{z}\right)^n du \\ &= 1\cdot\lim_{z\to 0}\int_0^1\left(\frac{1-u^z}{z}\right)^n du \\ &= \int_0^1\left(\lim_{z\to 0}\frac{1-u^z}{z}\right)^n du \end{aligned}$$

y por la regla de l'Hôpital se llega a

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-u^z}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{-u^z\log u}{1}=-\log u.$$

Por lo tanto:

$$n!=\int_0^1(-\log u)^n du=\int_0^1\left(\log\frac{1}{u}\right)^n du.$$

Aquí Euler obtiene una fórmula integral para la función factorial que nos da una manera de extender la función factorial de manera natural para valores que no necesariamente son enteros. Para ver bien en donde es válida esta fórmula integral, nosotros la reescribimos para obtener la forma (más actual) que usó Riemann en su artículo.

Tomamos el cambio de variable $x=-\log u$, junto con $dx=-u^{-1}du$, entonces

$$n!=-\int_{x(0)}^{x(1)}x^n u dx=\int_0^\infty e^{-x}x^n dx \tag{1.1.5}$$

donde $u=e^{-x}$.

Para conocer a qué valores de n podemos extender de manera natural la definición de $n!$, veamos en donde converge esta integral. Si tomamos n como un $s\in\mathbb{R}$ cualquiera, entonces debemos analizar el integrando $e^{-x}x^s$ cerca del infinito y del $x=0$.

Primero observemos que para x suficientemente grande pasa que $x^s e^{-x}\leq x^{-2}$, ya que para x de esta forma $x^{s+2}\leq e^x$. Por lo tanto para alguna M suficientemente grande, tenemos que

$$\int_M^\infty e^{-x}x^s dx\leq\int_M^\infty x^{-2}dx=\left[-\frac{x^{-3}}{3}\right]_M^\infty=\frac{1}{3M^3}<\infty.$$

Por lo tanto la cola al infinito siempre converge para todo valor de s, si hay problemas de convergencia, éstos aparecerán cerca del cero.

Consideremos la integral cerca de $x=0$, es decir sobre un intervalo $[0,\varepsilon]$ con $0<\varepsilon$. En $x=0$ tenemos $e^{-0}=1$, entonces el factor dominante (cerca de $x=0$) del integrando es x^s. Por lo tanto

$$\int_0^\varepsilon e^{-x}x^s dx\approx\int_0^\varepsilon x^s dx=\left[\frac{x^{s+1}}{s+1}\right]_0^1$$

lo cual converge si y sólo si $0<s+1$. Por lo tanto, la integral 1.1.5 converge si y sólo si converge cerca del cero lo cual sucede si y sólo si $-1<s=n$.

Por lo tanto la integral converge para todos los valores $s>-1$. Esto quiere decir que la integral en 1.1.5 es una función de n que está bien definida sobre el intervalo $(-1,\infty)$ que, restringido a los naturales, coincide con el factorial; la integral *extiende* la función factorial a todo el intervalo $(-1,\infty)$.

Usamos la notación de Gauss[3] y definimos:

$$\Pi(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^s dx \tag{1.1.6}$$

[3]Riemann usa la notación de Gauss, no la de Euler.

y así $\Pi(s)$ extiende la funcíon factorial a los reales $s > -1$. A esta función se le conoce como la función Gamma y la notación actual es $\Gamma(s) = \Pi(s-1)$, pero es más natural y fácil recordar que $\Pi(n) = n!$ que $\Gamma(n) = (n-1)!$ La notación Γ la introdujo Legendre.[4] Gauss y Riemann usaron la notación $\Pi(s)$ y es la que usaremos aquí.

Podemos deducir una ecuación funcional para $s > 0$ de manera inmediata: integramos por partes la fórmula integral de $\Pi(s)$ con $u = x^s$ y $dv = e^{-x}dx$ y obtenemos $du = sx^{s-1}dx$ y $v = -e^{-x}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\Pi(s) &= \int_0^\infty u dv = [uv]_0^\infty - \int_0^\infty v du \\
&= \left[-x^s e^{-x}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx \\
&= \left[-x^s e^{-x}\right]_0^\infty + s\Pi(s-1),
\end{aligned}$$

pero sabemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^s}{e^x} = 0$$

pues la exponencial crece más rápido que cualquier potencia de x. Además

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^s}{e^x} = \frac{\lim_{x\to 0} x^s}{\lim_{x\to 0} e^x} = 0$$

porque $s > 0$. Hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 1. *Para valores $s > 0$, se tiene la ecuación funcional* $\Pi(s) = s\Pi(s-1)$.

Gracias a esta ecuación funcional y por el hecho que

$$\Pi(0) = \int_0^\infty e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1$$

podemos demostrar por inducción que efectivamente $\Pi(n) = n!$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De lo anterior ya sabemos que $\Pi(n+1) = (n+1)\Pi(n)$ y por hipótesis de inducción tenemos que $\Pi(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$ y así verificamos 1.1.5.

La definición de $\Pi(s)$ dada en 1.1.6 nos permite extender la función factorial de manera natural al semiplano complejo $\mathrm{Re}(s) > -1$. Esto es un corolario de la definición en 1.1.6:

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty e^{-x}x^s dx\right| &\leq \int_0^\infty e^{-x}\left|x^{\mathrm{Re}(s)}\right|\left|x^{i\mathrm{Im}(s)}\right| dx \\
&\leq \int_0^\infty e^{-x}x^{\mathrm{Re}(s)}\left|e^{i\mathrm{Im}(s)\log x}\right| dx,
\end{aligned}$$

pero sabemos que $\left|e^{iz}\right| = 1$ para valores reales de z. Por lo tanto:

$$\left|\int_0^\infty e^{-x}x^s dx\right| \leq \int_0^\infty e^{-x}x^{\mathrm{Re}(s)}dx$$

donde ya habíamos visto que la integral del lado derecho converge cuando $\mathrm{Re}(s) > -1$. Por lo tanto la función $\Pi(s)$ se puede extender de manera natural al semiplano $\mathrm{Re}(s) > -1$.

Aquí ya no podemos seguir extendiendo a $\Pi(s)$ de la misma manera porque el primer polo de $\Pi(s)$ aparece en $s = -1$: cerca de $x = 0$, el integrando de $\Pi(s)$ es asintótico a:

$$e^{-x}x^{-1} \sim \frac{1}{x}$$

porque el cociente de ambos lados se hace 1 cuando $x \to 0$. Por lo tanto la integral en la definición de $\Pi(s)$ se hace infinita cuando $s \to -1^+$.

[4] Una razón plausible de porqué decidió Legendre trasladar la función factorial una unidad a la derecha es para trasladar el primer polo de $\Pi(s)$ que aparece en $s = -1$ al cero del plano complejo. Para este trabajo y para el artículo de Riemann, esa razón parece ser puramente estética

Esto significa que si queremos seguir extendiendo la función $\Pi(s)$ a todo el plano complejo, necesitamos usar la otra definición que tenemos para $\Pi(s)$: la definición original 1.1.1. La idea es manipularla algebráicamente para obtener una expresión como producto infinito que permita analizar los polos y ceros de $\Pi(s)$ y que finalmente permita extender la función factorial al dominio –del plano complejo– más grande posible.

Empezamos con:

$$\begin{aligned}
\Pi(s) &= \lim_{N\to\infty} \frac{N!}{(s+1)\cdots(s+N)}(N+1)^s \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{N!}{1\cdot\left(1+\frac{s}{1}\right)\cdot 2\cdot\left(1+\frac{s}{2}\right)\cdots N\cdot\left(1+\frac{s}{N}\right)}(N+1)^s \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(1+s)\left(1+\frac{s}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{N}\right)}(N+1)^s.
\end{aligned}$$

Para usar la herramienta de la variable compleja, reescribimos este límite como un producto infinito. Consideremos el producto telescópico:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+1}{1}\right)\left(\frac{2+1}{2}\right)\left(\frac{3+1}{3}\right)\cdots\left(\frac{N-1+1}{N-1}\right)\left(\frac{N+1}{N}\right) &= N+1 \\
\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{N-1}\right)\left(1+\frac{1}{N}\right) &= N+1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\Pi(s) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(1+s)\left(1+\frac{s}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{N}\right)}(N+1)^s \\
&= \lim_{N\to\infty} (1+s)^{-1}\cdots\left(1+\frac{s}{N}\right)^{-1}\cdot\left(1+\frac{1}{1}\right)^s\cdots\left(1+\frac{1}{N}\right)^s \\
&= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s.
\end{aligned}$$

Si el producto anterior converge, tendríamos una función meromorfa en todo el plano complejo con polos en los enteros negativos $s \in \mathbb{Z}^-$. Observemos también que la fórmula del producto nos implicaría que $\Pi(s)$, si el producto anterior define una función analítica fuera de $\mathbb{Z}^-$, se hace cero si y sólo si algún factor del producto se anular, pero es claro que los factores no se anulan para toda n y s. Estos hechos se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 2. *La función factorial es una función analítica en* $\mathbb{C} - \{-1, -2, \ldots\}$ *y se puede escribir como*

$$\Pi(s) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^{1-s}(n+1)^s}{s+n}.$$

Demostración. Primero debemos verificar que el primer producto del teorema converge para poder hablar de igualdad. Consideremos el inverso multiplicativo del producto y definimos:

$$a_n = \left(1+\frac{s}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s},$$

entonces tenemos que $\Pi(s)^{-1} = \prod a_n$. Como el producto $\prod a_n$ se anula para $s = -1, -2, -3, \ldots$, necesitamos que $s \neq -1, -2, -3, \ldots$ para que ningún término a_n se anule y así poder hablar formalmente de la convergencia del producto. Ahora desarrollamos los factores a_n:

$$a_n = \left(1+\frac{s}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s} = \left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s\log(1+1/n)},$$

entonces si expandimos $e^{-s\log(1+1/n)}$ en su serie de potencias, tenemos:

$$a_n = \left(1+\frac{s}{n}\right)\left(1 - s\log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{s^2}{2!}\log^2\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cdots\right).$$

Pero sabemos que la expansión en serie de potencias de $\log(1+x)$ con $|x|<1$ es

$$\log(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^m}{m},$$

por lo tanto para $x = \frac{1}{n}$ y $n > 1$ tenemos que

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \cdots,$$

$$\therefore \quad s\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{s}{n} - \frac{s}{2n^2} + \frac{s}{3n^3} - \frac{s}{4n^4} + \cdots = \frac{s}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donde la notación $\mathcal{O}(n^{-2})$ se refiere a que la cola de la serie es de orden n^{-2} cuando $n \to \infty$,[5]

Entonces cualquier potencia entera positiva de $\log(1+n^{-1})$ es de orden al menos n^{-2}, es decir:

$$\log^k\left(1+\frac{1}{n}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \forall k > 1.$$

Entonces podemos reescribir a_n como

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{s}{n}\right)\left(1 - s\log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \mathcal{O}(n^{-2})\right) = \left(1+\frac{s}{n}\right)\left(1 - \frac{s}{n} + \mathcal{O}(n^{-2})\right) \\ &= 1 - \frac{s}{n} + \frac{s}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Si hacemos $a_n = b_n + 1$ entonces tendremos que $b_n = \mathcal{O}(n^{-2})$ y así la serie $\sum b_n$ converge absolutamente. Por lo tanto [6] el producto $\Pi(s)^{-1}$ converge absolutamente y así $\Pi(s)$ converge absolutamente siempre y cuando ningún factor de $\Pi(s)^{-1}$ sea cero, i.e. cuando s no es un entero negativo.

Para obtener la otra expresión del producto, sólo hay que reescribir los factores del producto como:

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s} &= \left(\frac{n+s}{n}\right)^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{s} = \left(\frac{n}{n+s}\right)(n+1)^s\, n^{-s} \\ &= \frac{n^{1-s}\,(n+1)^s}{s+n}. \end{aligned}$$

□

Es importante notar que, gracias a la expresión como producto, podemos saber cuándo $\Pi(s) = 0$. Como el producto anterior define una función analítica en $\mathbb{C} - \mathbb{Z}^{-1}$, la función que define se anula sólo cuando un factor se hace cero, pero esto nunca sucede ya que el numerador de cada factor es de la forma $\left(1+n^{-1}\right)^s$ y estos nunca se anulan pues $1 + n^{-1} \neq 0$ para toda $n \geq 1$.

Por último, para el artículo de Riemann necesitaremos dos propiedades más de la función factorial.

Teorema 3. *La función factorial cumple*

1. (Fórmula de reflexión de Euler)

$$\frac{\pi s}{\Pi(s)\Pi(-s)} = \sin \pi s$$

[5] Es decir, que para n suficientemente grande se tiene que la cola de la serie, $f(n) = -\frac{1}{2}n^{-2} + \frac{1}{3}n^{-3} - \cdots$, cumple que $|f(n)| \leq Mn^{-2}$ para alguna constante positiva M.

[6] Una condición suficiente y necesaria para la convergencia absoluta del producto $\prod(1+b_n)$ es la convergencia de la serie $\sum|b_n|$. [1, página 191]

2. (Relación de Legendre)

$$\Pi(s) = 2^s \Pi\left(\frac{s}{2}\right) \Pi\left(\frac{s-1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Demostración. Para demostrar la fórmula de reflexión de Euler, desarrollamos el lado izquierdo. Usamos la fórmula del producto de $\Pi(s)$ para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{\pi s}{\Pi(s)\Pi(-s)} &= \pi s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{s}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{s}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s} \\ &= \pi s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{s^2}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Observemos que este último producto es la fórmula del producto para la función $\sin \pi s$ y así queda demostrada la fórmula de reflexión de Euler.

La relación de Legendre no la demostramos aquí porque requiere un poco más de teoría de productos infinitos[7] y Riemann la usa (sin mencionarla por su nombre) para reescribir la ecuación funcional de $\zeta(s)$ [13, líneas 29-30 y ecuación A.8].

□

1.2. El producto de Euler

Terminado el estudio de la función factorial, regresamos al punto de partida del artículo de Riemann: el producto de Euler. De hecho es la primera ecuación que escribe (fórmula A.1). Recordemos que estas referencias son a las ecuaciones del artículo de Riemann que viene en el apéndice A (véase la introducción).

El estudio de esta identidad inicia con la serie armónica. Es conocido que la serie armónica diverge a infinito:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty.$$

Para demostrar que diverge basta ver que al agrupar los términos de la serie armónica de esta manera

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \cdots,$$

obtenemos una cota inferior para la serie armónica, de tal manera que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq \sum \frac{1}{2} = \infty.$$

En abril de 1737, Euler presentó ante la Academia de San Petersburgo la demostración de algo más fuerte que la divergencia de la serie armónica: la serie de los recíprocos de los primos divergía [6, E72]:

$$\sum_{p} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \infty, \tag{1.2.1}$$

donde la suma corre sobre todos los numeros primos $p \in \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$. De aquí en adelante p denotará un número primo. Es en esta demostracón donde aparece su famoso "Producto de Euler".

En "*Variae observationes circa series infinitas*" [6], publicado en 1744, la demostración que da Euler de 1.2.1 primero requiere que el producto:

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots} = \prod_{p} \frac{p}{p-1} = \prod \frac{1}{1-p^{-1}}$$

[7] El libro "Complex Analysis" de Ahlfors tiene una prueba de la relación de Legendre escrita con la función Γ en lugar de la función factorial. [1]

sea igual a la serie armónica $\sum n^{-1}$. Como la serie armónica diverge, la demostrción de Euler no está enteramente justificada porque manipula algebráicamente una serie divergente, pero la argumentación sí es válida y muy ingeniosa.

Para demostrar que el producto infinito anterior diverge, Euler inicia escribiendo

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots ,$$

del cual obtiene

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots ,$$

que es la serie de los recíprocos de los números pares. Al restar ambas series obtenemos la serie

$$x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots , \tag{1.2.2}$$

cuyos denominadores son los números impares.

La idea de Euler es restarle a $x = \sum n^{-1}$ los sumandos cuyos denominadores son pares, después restarle los sumandos cuyos denominadores son múltplos de 3, luego restarles los sumandos cuyos denominadores son múltiplos de 5 y así sucesivamente hasta eliminar todos los sumandos de la serie armónica, salvo el 1.

Al hacer la primera resta, Euler obtuvo la serie 1.2.2. Después, a ésta le resta los sumandos que tienen denominadores que son múltiplos de 3, es decir, a $\frac{1}{2}x$ le resta la serie:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \cdots$$

y obtiene la serie

$$\frac{1}{2}\frac{2}{3}x = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots .$$

Después de esto, a la serie anterior, le resta la serie $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\frac{2}{3}x\right)$ y obtiene:

$$\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}x = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots$$

donde ningún denominador es un múltiplo de 2, 3 o 5.

Si repetimos este proceso hasta el primo p, entonces tenemos que

$$\left(\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{p-1}{p}\right)x = 1 + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots \tag{1.2.3}$$

donde los denominadores n_i de los sumandos del lado derecho no son divisibles por ningún número primo menor o igual que p.

Ahora, si hacemos este proceso para *todos* los primos p, entonces todos los sumandos del lado derecho de 1.2.3 desaparecen salvo el 1 y obtenemos:

$$\left(\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{p-1}{p}\cdots\right)x = \prod_p \frac{p-1}{p}x = 1.$$

Si despejamos $x = \sum n^{-1}$ obtenemos lo que quería Euler:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-1}}. \tag{1.2.4}$$

Justo este producto es el precursor del "Producto de Euler". El problema con 1.2.4 es que se derivó a partir de manipulaciones algebráicas que no se deben de hacer con series o productos divergentes. Entonces, lo adecuado es que, en lugar de considerar la serie armónica, se considere una serie más general:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

donde s es un número real. Para que la serie anterior converja, es necesario que $s > 1$. Esto se afirma directamente con la prueba de la integral para la convergencia de series.

Si, en la demostración para llegar a 1.2.4 sustituimos n^{-1} por n^{-s} en la serie armónica con $s > 1$ un real cualquiera, entonces todas las manipulaciones algebráicas que hizo Euler para deducir 1.2.4 ya son justificadas y así tenemos el "Producto de Euler":

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \quad s > 1. \tag{1.2.5}$$

Formalmente, esta identidad se demuestra de una manera más moderna. Observemos que para $s > 1$, la serie geométrica $1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \cdots$ converge para cualquier primo p y converge a:

$$1 + p^{-s} + p^{-2s} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(p^{-s}\right)^k = \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Cada serie geométrica (una para cada número primo p) resulta ser un factor del producto 1.2.5, entonces:

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_p \left(1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \cdots\right),$$

y así podemos saber cómo son los sumandos de ese producto. Al hacer el producto, la fórmula general de cada sumando es de la forma $(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_t^{n_t})^{-s}$ y por el Teorema fundamental de la aritmética[8] podemos garantizar que cada número natural (elevado a la potencia s) aparece una vez como sumando y así demostramos el producto de Euler. Cabe mencionar que el producto de Euler 1.2.5 es válido cuando la serie $\sum n^{-s}$ es convergente, es decir cuando $s > 1$.

De hecho, la serie $\sum n^{-s}$ define una función analítica de s en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1$ porque la serie $\sum n^{-s}$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos del semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1$: si K es un compacto en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1$, entonces hay una $\varepsilon > 0$ tal que $1 + \varepsilon < \mathrm{Re}(s)$ para toda $s \in K$, por lo tanto tenemos que $|\sum n^{-s}| \leq \sum n^{-\mathrm{Re}(s)} < \sum n^{-1-\varepsilon} < \infty$ y la convergencia uniforme se sigue inmediatamente.

Por lo tanto, la igualdad 1.2.5, junto con el Teorema de Weierstrass[9] nos dice que el producto de Euler es una función analítica de s en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Otra identidad útil se deduce al invertir la ecuación 1.2.5:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right)^{-1} &= \prod_p (1 - p^{-s}) \\
&= \left(1 - \frac{1}{p_1^s}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{p_3^s}\right)\cdots \\
&= 1 - \left(\frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_2^s} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{p_1^s p_2^s} + \frac{1}{p_1^s p_3^s} + \frac{1}{p_2^s p_3^s} + \cdots\right) - \cdots \\
&= 1 - \sum_{0<i} \frac{1}{(p_i)^s} + \sum_{0<i<j} \frac{1}{(p_i p_j)^s} - \sum_{0<i<j<k} \frac{1}{(p_i p_j p_k)^s} + \cdots,
\end{aligned}$$

donde los signos dependen de cuántos primos distintos aparecen en el denominador porque al desarrollar el producto $\prod_p (1 - p^{-s})$ cada término $-p^{-s}$ lleva un signo menos, entonces al multiplicar n de éstos se

[8]El Teorema fundamental de la aritmética dice que para todo natural $n \in \mathbb{N}$ existe una factorización única en números primos (salvo el orden de los factores y la presencia de unidades), i.e. existen $p_1, \ldots, p_r$ primos tal que $n = p_1 \cdots p_r$ y los números primos que se repiten se pueden agrupar en potencias $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_t^{m_t}$.

[9]El teorema de Weierstrass al que se refiere el texto es aquel que dice que si una serie $\sum f_n(s)$ de sumandos analíticos converge uniformemente sobre compactos en un abierto de $\mathbb{C}$, entonces la serie es una función analítica en ese abierto. [1, página 175]

factoriza n veces (-1) y así obtenemos que:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)^{-1} = 1 + (-1)^1\sum_{0<i}\left(\frac{1}{p_i}\right)^s + (-1)^2\sum_{0<i<j}\left(\frac{1}{p_ip_j}\right)^s + (-1)^3\sum_{0<i<j<k}\left(\frac{1}{p_ip_jp_k}\right)^s + \cdots . \tag{1.2.6}$$

Como el exponente de -1 depende de la cantidad de factores primos distintos, entonces usamos la función de Möbius para describirlo.

Definición 1. La función de Möbius es una función aritmética $\mu : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ multiplicativa[10] que se define como

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ (-1)^t & n = p_1 \cdots p_t \\ 0 & \exists p^2 \mid n \end{cases}$$

donde $p_1, \ldots, p_t$ son primos distintos y $\mu(n) = 0$ si a n lo divide un cuadrado.

Por lo tanto podemos escribir 1.2.6 de la forma

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)^{-1} = 1 + \sum_{0<i}\left(\frac{\mu(p_i)}{p_i}\right)^s + \sum_{0<i<j}\left(\frac{\mu(p_ip_j)}{p_ip_j}\right)^s + \sum_{0<i<j<k}\left(\frac{\mu(p_ip_jp_k)}{p_ip_jp_k}\right)^s + \cdots .$$

Como todo natural aparece en esta suma en la forma $\mu(n)n^{-s}$ (donde los naturales al que los divide un cuadrado no aparecen porque $\mu(n) = 0$), podemos concluir que:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)^{-1} = \prod_{p}\left(1 - p^{-s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}. \tag{1.2.7}$$

1.3. La función contadora de primos

El propósito del artículo de Riemann, como lo dice el título, es encontrar una expresión para la función contadora de primos

$$\pi(x) = \operatorname{card}\{p \in \mathbb{N} \mid p \,\text{es primo}, p \leq x\} = \sum_{p \leq x} 1,$$

(que él denota por $F(x)$). Cuando termina de desarrollar su nueva función (la función ζ de Riemann), modifica la función $\pi(x)$ para poder aplicarle la herramienta matemática que acababa de hacer. Resulta que esta modificación que le hace a $\pi(x)$, que en seguida analizaremos, simplifica notablemente las cuentas requeridas para deducir una expresión analítica para $\pi(x)$.

En esta sección analizaremos las líneas 61-70 del artículo de Riemann:

61 With the assistance of these methods, the number of prime numbers that are smaller than x can now
62 be determined.
63 Let $F(x)$ be equal to this number when x is not exactly equal to a prime number; but let it be greater
64 by $\frac{1}{2}$ when x is a prime number, so that, for any x at which there is a jump in the value in $F(x)$,

$$F(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}.$$

65 If in the identity

$$\log\zeta(s) = -\sum\log(1 - p^{-s}) = \sum p^{-s} + \tfrac{1}{2}\sum p^{-2s} + \tfrac{1}{3}\sum p^{-3s} + \cdots$$

[10] Una función f multiplicativa es una función aritmética que cumple que si dos enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ son primos relativos, i.e. que su máximo común divisor es 1, $(a, b) = 1$, entonces se cumple que $f(ab) = f(a)f(b)$.

66 one now replaces

$$p^{-s} \text{ by } s\int_p^\infty x^{-s-1}ds, \quad p^{-2s} \text{ by } \int_{p^2}^\infty x^{-s-1}ds, \dots,$$

67 one obtains

$$\frac{\log\zeta(s)}{s} = \int_1^\infty f(x)x^{-s-1}dx,$$

68 if one denotes

$$F(x) + \tfrac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

69 by $f(x)$.

Riemann introduce una nueva función, que él llama $f(x)$, para simplificar la notación y las cuentas. De hecho, como resulta tedioso intentar encontrar una expresión analítica para $\pi(x)$, lo que hace Riemann es modificar esta función contadora de primos y trabajar con su propia función contadora de primos. En el artículo, Riemann no menciona que va a alterar $\pi(x)$ hasta tener una expresión analítica manejable para el producto de Euler 1.2.5 en donde aparece la forma modificada de $\pi(x)$.

En lugar de usar la notación $F(x)$ para la nueva función contadora de primos, vamos a seguir la notación de H.M. Edwards [4] y denotamos $J(x) = F(x)$ porque $F(x)$ se usa para denotar funciones en general.

Como estamos presentando un fragmento del artículo fuera de contexto, hay que aclarar a qué se refiere Riemann con la función $\zeta(s)$. Al principio del artículo, él define a $\zeta(s)$ como el producto de Euler en 1.2.5 (como función de s). Para esta sección, esa definición basta, no requerimos de su extensión analítica para estudiar la función $J(x)$.

En la línea 65, Riemann sustituye el producto de Euler en $\log\zeta(s)$ para obtener:

$$\log\left(\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}\right) = \sum_p \log\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right) = \sum_p \big(\log(1) - \log(1-p^{-s})\big) = -\sum_p \log(1-p^{-s}).$$

Aquí Riemann usa la expansión en serie de Taylor de $\log(1-p^{-s})$. En general, la serie de Taylor de $\log(1-x)$ es

$$\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n,$$

entonces si sustituimos $x = p^{-s}$ obtenemos $\log(1-p^{-s}) = -\sum \frac{1}{n}p^{-sn}$ y si remplazamos esto en el desarrollo de $\log\zeta(s)$ obtenemos:

$$\log\zeta(s) = -\sum_p \log(1-p^{-s}) = \sum_p \sum_n \frac{1}{n}\left(p^{-s}\right)^n. \tag{1.3.1}$$

Ahora, como ambas series son absolutamente convergentes[11], Riemann reordena los sumando de la serie para obtener:

$$\log\zeta(s) = \sum_n \sum_p \frac{1}{n}p^{-ns} = \sum_p p^{-s} + \frac{1}{2}\sum_p p^{-2s} + \frac{1}{3}\sum_p p^{-3s} + \cdots.$$

Después, él sustituye la integral

$$s\int_{p^n}^\infty x^{-s-1}dx = s\left[-\frac{x^{-s}}{s}\right]_{p^n}^\infty = p^{-ns}$$

en la igualdad anterior para obtener:

$$\log\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n}\sum_p p^{-ns} = s\sum_n \frac{1}{n}\sum_p \int_{p^n}^\infty x^{-s-1}dx. \tag{1.3.2}$$

[11] La primera serie (con p un primo fijo y $s > 1$) es absolutamente convergente porque es la serie de Taylor de $\log(1-x)$ que con $x = p^{-s} < 1$. La segunda serie (con $n \in \mathbb{N}$ fija y $s > 1$) es absolutamente convergente porque

$$\sum_p \left|\frac{1}{n}p^{-sn}\right| = \sum_p \frac{1}{n}p^{-sn} = \log(1-p^{-s}).$$

De aquí ya no es claro cómo Riemann obtiene su última igualdad [13, ecuación A.23], pero lo que sí se ve es que junta la suma de integrales (sobre intervalos distintos) en una sola. Como está sumando integrales de la misma función, x^{-s-1}, entonces se puede separar la suma de integrales en una suma de integrales sobre intervalos específicos y ver cuantas veces se suman esos intervalos.

Por ejemplo, la integral sobre el intervalo $[5,7)$ se suma cuatro veces (con sus respectivos coeficientes de la forma $\frac{1}{n}$) porque ese intervalo aparece en las integrales

$$\frac{1}{1}\int_2^\infty x^{-s-1}dx, \frac{1}{1}\int_3^\infty x^{-s-1}dx, \frac{1}{2}\int_{2^2}^\infty x^{-s-1}dx \text{ y } \frac{1}{1}\int_5^\infty x^{-s-1}dx,$$

entonces se suma $3\frac{1}{2}$ veces la integral de x^{-s-1} sobre el intervalo $[5,7)$. Para visualizar cómo funcionan estos conteos, escribamos la suma de integrales en 1.3.2 en forma de tabla:

$$\begin{array}{c}
\frac{1}{1}\int_2^\infty x^{-s-1}dx + \frac{1}{1}\int_3^\infty x^{-s-1}dx + \frac{1}{1}\int_5^\infty x^{-s-1}dx + \cdots \\
\frac{1}{2}\int_{2^2}^\infty x^{-s-1}dx + \frac{1}{2}\int_{3^2}^\infty x^{-s-1}dx + \frac{1}{2}\int_{5^2}^\infty x^{-s-1}dx + \cdots \\
\frac{1}{3}\int_{2^3}^\infty x^{-s-1}dx + \frac{1}{3}\int_{3^3}^\infty x^{-s-1}dx + \frac{1}{3}\int_{5^3}^\infty x^{-s-1}dx + \cdots \\
\vdots \\
\frac{1}{n}\int_{2^n}^\infty x^{-s-1}dx + \frac{1}{n}\int_{3^n}^\infty x^{-s-1}dx + \frac{1}{n}\int_{5^n}^\infty x^{-s-1}dx + \cdots \\
\vdots
\end{array}$$

Observamos que todas las integrales actúan sobre el intervalo $[2,\infty)$ en diferentes subintervalos contenidos en $[2,\infty)$.

Para establecer cómo es esta acción, consideremos la siguiente partición del intervalo $[2,\infty)$:

$$\mathcal{P}_k = \{2,3,2^2,5,7,2^3,3^2,11,13,\ldots\} = \{p^k \in \mathbb{N} \mid p \,\text{es primo}, k \geq 1\}.$$

La notación se deriva de que $\mathcal{P} = \{2,3,5,7,11,13,\ldots\}$ es el conjunto de los números primos. Por lo tanto escribimos la tabla de integrales en una suma de integrales sobre la partición inducida por $\mathcal{P}_k$ de la forma:

$$\frac{1}{1}\int_2^3 x^{-s-1}dx + \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)\int_3^{2^2} x^{-s-1}dx + \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)\int_{2^2}^5 x^{-s-1}dx + \cdots \tag{1.3.3}$$

donde cada coeficiente de las integrales denota las veces que se suma ese intervalo particular en la tabla.

Esto se puede visualizar en la figura 1.3.1. donde el tono del naranja se hace cada vez más oscuro a medida que se van contando cada vez más los intervalos.

Empíricamente se pueden verificar los coeficientes de las integrales de 1.3.3 observando el arreglo anterior y viendo cuantas integrales (con sus respectivos coeficientes) actúan sobre el intervalo de la integral al que le queremos calcular su coeficiente. Proponemos $J(x)$ como la función que nos calcula el coeficiente de la integral sobre el intervalo $[a,b]$ cuando $x \in [a,b]$.

Por lo tanto, de las ecuaciones 1.3.2 y 1.3.3 queda:

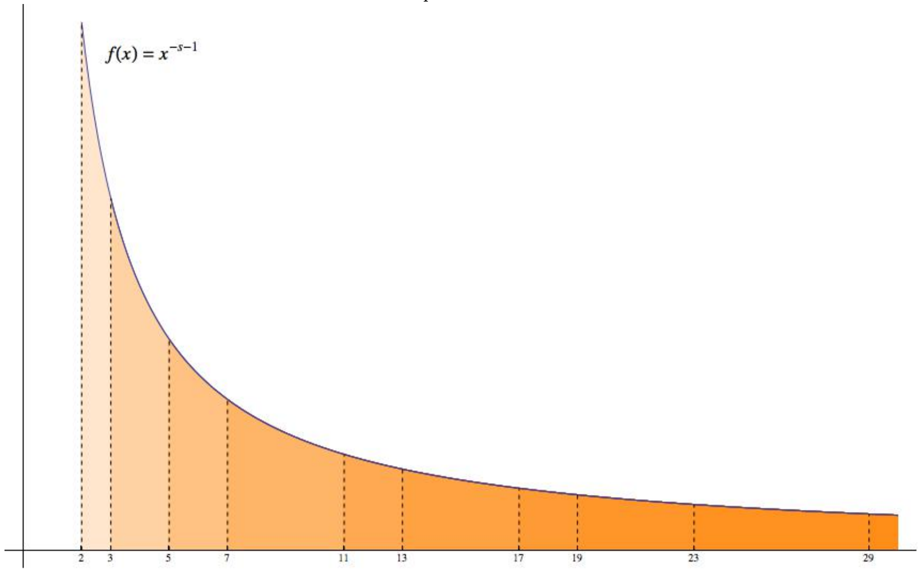
$$\log \zeta(s) = s \sum_{a_i \in \mathcal{P}_k} J(x) \int_{a_i}^{a_{i+1}} x^{-s-1}dx, \tag{1.3.4}$$

donde las a_i son los elementos ordenados de $\mathcal{P}_k$.

Como en cada intervalo la función $J(x)$ es constante, se puede meter a la integral, también podemos observar que $J(x)$ es no decreciente y hay saltos de 1 en cada primo, saltos de $\frac{1}{2}$ en cada primo al cuadrado, saltos de $\frac{1}{3}$ en cada primo al cubo, etc. Una fórmula explícita para $J(x)$ usando esta descripción es

$$J(x) = \sum_{p^n \leq x} \frac{1}{n}. \tag{1.3.5}$$

Figura 1.3.1: Efecto de $\sum \frac{1}{n} \int_{p^n}^{\infty} x^{-s-1} dx$ sobre el intervalo $[2, \infty)$



Con esta definición, la ecuación 1.3.4 queda:

$$\log \zeta(s) = s \sum_{a_i \in \mathcal{P}_k} \int_{a_i}^{a_{i+1}} J(x) x^{-s-1} dx = s \int_2^{\infty} J(x) x^{-s-1} dx$$

y como $J(x) \equiv 0$ para $0 \leq x < 2$,[12] podemos extender la integral hasta el intervalo $[1, \infty)$. Entonces concluimos:

$$\log \zeta(s) = s \int_1^{\infty} J(x) x^{-s-1} dx. \tag{1.3.6}$$

Lo único que falta ver es que la función $J(x)$ definida en 1.3.5 coincida con la función que escribe Riemann:

$$f(x) = \pi(x) + \frac{1}{2} \pi \left(x^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{3} \pi \left(x^{\frac{1}{3}} \right) + \cdots .$$

La fórmula explícita de $J(x)$ dada en 1.3.5 nos dice que por cada primo hay que sumar 1. Es decir, que $J(x) = \pi(x) + \text{algo}$. Ahora, por cada primo al cuadrado menor o igual que x, hay que sumar un $\frac{1}{2}$, entonces, como $\pi(x^{1/2})$ cuenta los primos cuadrados menores que x,[13] $J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \text{algo}$.

Si seguimos este razonamiento, llegamos a la fórmula:

$$J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \cdots + \frac{1}{n}\pi(x^{1/n}) + \cdots = \sum_n \frac{1}{n}\pi(x^{1/n}). \tag{1.3.7}$$

Observemos que la suma anterior es finita porque para n suficientemente grande, $x^{1/n} < 2$ y así $\pi(x^{1/m}) = 0$ para toda $m \geq n$. Por lo tanto la función $f(x)$ que propone Riemann y la función $J(x)$ que dedujimos y después definimos en 1.3.5, son la misma función. Con esto demostramos la igualdad que concluye Riemann [13, ecuación A.24].

Hagamos un alto para adentrarnos más en lo que Riemann obtuvo. Él estableció una relación entre $\zeta(s)$, o más bien $\log \zeta(s)$, y la función $J(x)$ que en esencia cuenta primos. Por lo tanto, un estudio analítico de la función $\log \zeta(s)$ nos dará información sobre la función $J(x)$ y finalmente nos dará información sobre la función contadora de primos $\pi(x)$.

[12] La definición de $J(x)$ dada en 1.3.5 nos dice que para $x < 2$ la suma es vacía porque no hay números primos ni potencias de primos menores que dos.

[13] Esto sucede porque $p^2 \leq x \iff p \leq x^{1/2}$.

Por lo tanto si pudiéramos, de alguna manera, *invertir* la relación 1.3.7 y expresar a $\pi(x)$ en función de $J(x)$, entonces el estudio analítico de la función $\log\zeta(s)$ nos dará una clara idea de cómo se comporta $\pi(x)$.

Podemos adelantar un poco de qué trata el artículo de Riemann dentro de este contexto. El propósito es estudiar analíticamente la función $\zeta(s)$. Sabemos, por la sección 1.2, que el producto de Euler es analítico en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1$ por virtud de la serie $\sum n^{-s}$. Pero, la relación entre $\log\zeta(s)$ y $J(x)$ obliga a estudiar analíticamente los ceros de la función $\zeta(s)$ para encontrar los polos logarítmicos de $\log\zeta(s)$. El estudio de estos polos logarítmicos permitirá obtener una expresión para la función $J(x)$.

Una expresión para $J(x)$ permitirá estudiar cómo se comporta la función $\pi(x)$ para x suficientemente grande; recordemos que aproximar $\pi(x)$ era uno de los problemas de mayor interés del siglo XIX. De hecho Riemann menciona en el primer párrafo de su artículo que "...the accumulation of the prime numbers" era un problema que 'posiblemente' merecía estudio gracias al interés que tenían Gauss y Dirichlet por él durante un largo periodo de tiempo [13, líneas 3-5].

Por lo tanto estudiar los ceros de $\zeta(s)$ se vuelve un problema central del artículo. Riemann se da cuenta inmediatamente que el producto de Euler, como definición de $\zeta(s)$, no va a servir para estudiar los ceros de $\zeta(s)$ porque ningún factor del él se hace cero:

$$\frac{1}{1-p^{-s}} \neq 0 \quad \text{para cualquier } p \text{ primo.}$$

Como el producto de Euler es absolutamente convergente, ya que

$$\left|\frac{1}{1-p^{-s}}\right| \leq \frac{1}{||1|-|p^{-s}||} = \frac{1}{1-p^{-\mathrm{Re}(s)}},$$

entonces $\zeta(s)$ se anula sólo cuando un factor se hace cero. Por lo tanto, $\zeta(s)$ no se anula cuando está definida por el producto de Euler, i.e. en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Entonces, antes que nada, esto obligó a Riemann a *extender* analíticamente la función $\zeta(s)$ a un dominio del plano más grande que el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1$ para poder encontrar ceros de $\zeta(s)$. Una vez extendida a todo el plano complejo (salvo por un polo en $s = 1$), Riemann procede a encontrar una expresión analítica más sencilla para $\log\zeta(z)$ y con esto podrá encontrar una expresión analítica para $J(x)$.

Pero, aquí hay un problema: si encontramos una expresión algebráica para $\zeta(s)$, la ecuación 1.3.6 no nos permitirá *despejar* la función $J(x)$ y encontrar así una expresión analítica sencilla para $J(x)$. Entonces era necesario que Riemann encontrara un método para *despejar* $J(x)$ de la ecuación 1.3.6, y usó un método, que él mismo desarrolló, derivado del análisis de Fourier y lo vamos a ver en la sección que sigue.

Por último, de la misma manera, *despejar* $\pi(x)$ en la ecuación 1.3.7 va a generar una expresión analítica para $\pi(x)$. Este último despeje lo menciona Riemann indirectamente [13, líneas 108-109] y sin demostración. En esta sección demostramos la *inversión* que hace Riemann [13, ecuación A.48].

Teorema 4.

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J\left(x^{1/n}\right)$$

Demostración. Denotamos el anillo de funciones $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ por $\mathcal{F}$. Ahora consideremos el operador U_p de funciones definido por

$$f(x) \mapsto f(x) - \frac{1}{p} f\left(x^{1/p}\right)$$

donde p es cualquier primo. Lo que queremos demostrar ahora es que si, para cada primo, le aplicamos U_p a $J(x) \in \mathcal{F}$ vamos a poder aislar el término $\pi(x)$ del lado derecho de 1.3.7 y del lado izquierdo obtendremos una expresión que sólo depende de $J(x)$.

Para ver cómo actúan los operadores U_p primero calculamos:

$$\begin{aligned} U_3 U_2 (f)(x) &= U_3 \left(f(x) - \frac{1}{2} f\left(x^{1/2}\right) \right) \\ &= f(x) - \frac{1}{2} f\left(x^{1/2}\right) - \frac{1}{3} f\left(x^{1/3}\right) + \frac{1}{6} f\left(x^{1/6}\right). \end{aligned}$$

Observamos que la acción de U_3 sobre $f(x) - \frac{1}{2}f(x^{1/2})$ es repetir lo que ya se tiene (por el término idéntico) y luego sumar los mismos términos pero alterados de la manera $\frac{1}{n}f(x^{1/n}) \to -\frac{1}{3n}f(x^{1/3n})$. En general tenemos

$$U_p\left(\sum \frac{\pm 1}{n} f\left(x^{1/n}\right)\right) = \sum \frac{\pm 1}{n} f\left(x^{1/n}\right) + \sum \frac{\mp 1}{pn} f\left(x^{1/pn}\right) \tag{1.3.8}$$

donde todavía no sabemos bien qué valores toma el índice n ni sabemos bien el signo de los sumandos. Primero deducimos que valores toma el índice n.

Lo que nos dice 1.3.8 es que al aplicar cualquier operador U_p se obtiene una suma cuyos sumandos son todos de la forma:

$$\pm\frac{1}{n} f(x^{1/n}).$$

También, y con mayor importancia, la ecuación 1.3.8 nos dice que, si empezamos con una suma de la forma:

$$S(A) := \sum_{n \in A} \frac{\pm 1}{n} f(x^{1/n})$$

donde A es un conjunto de índices, entonces $U_p(S(A))$ es de la misma forma, es decir, $U_p(S(A)) = S(B)$ donde B es *otro* conjunto de índices. Ahora, la ecuación 1.3.8 nos dice que el conjunto original de índices A se preserva bajo la acción de U_p, entonces $A \subseteq B$. La acción de U_p también agrega el conjunto:

$$pA := \{p \cdot n \in \mathbb{N} \mid n \in A\}$$

al conjunto de índices. Por lo tanto podemos concluir que $U_p(S(A)) = S(A \cup pA)$ cuando $A \cap pA = \emptyset$. Si empezamos con $A_0 = \{1\}$, es decir, con la función $S(A_0) = f(x)$, y le aplicamos U_2, entonces obtenemos $U_2(S(A_0)) = S(A_1)$ donde $A_1 := A_0 \cup 2A_0 = \{1, 2\}$ (observemos que $A_0 \cap 2A_0 = \emptyset$). Si ahora le aplicamos U_3, obtenemos $U_3U_2(S(A_0)) = A_2$ con

$$A_2 = A_1 \cup 3A_1 = (A_0 \cup 2A_0) \cup 3(A_0 \cup 2A_0) = A_0 \cup 2A_0 \cup 3A_0 \cup 6A_0 = \{1, 2, 3, 6\}.$$

Recursivamente tenemos que:

$$A_n = A_{n-1} \cup p_n A_{n-1}$$

donde p_n es el $n-$ésimo primo. Podemos afirmar que A_n es el conjunto de números que se pueden escribir como un producto de los primero n números primos sin repetir primos en la factorización. Es claro que esto se puede demostrar por inducción: con $A_1 = \{1, 2\}$ como base y con la definición de A_n como hipótesis de inducción.

Con esto podemos mejorar la ecuación 1.3.8 a:

$$\begin{aligned} &U_{p_n} \cdots U_3U_2(f)(x) = \\ &\qquad f(x) + \sum_{1 \le i \le n} \frac{\pm}{p_i} f\left(x^{1/p_i}\right) + \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{\pm 1}{p_ip_j} f\left(x^{1/p_ip_j}\right) + \cdots + \frac{\pm 1}{p_1 \cdots p_n} f(x^{1/p_1 \cdots p_n}). \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Ahora sólo falta ver qué signo tiene cada sumando. Vimos que cuando aplicamos U_p nos lleva los términos $\frac{1}{n}f(x^{1/n}) \to -\frac{1}{pn}f\left(x^{1/pn}\right)$. Es decir, que por cada factor primo nuevo en la factorización de n cambiamos el signo. Si empezamos con signo negativo en un primo $n = p_i$, al aplicarle U_p el término $m = p_ip$ tiene un signo distinto que $n = p_i$. Por lo tanto, si n tiene una cantidad impar de factores primos, su signo es negativo y si tiene una cantidad par de factores primos entonces su signo es positivo, y la función que justo hace esto es la función de Möbius. Por lo tanto la ecuación 1.3.9 la reescribimos como:

$$\begin{aligned} &U_{p_n} \cdots U_3U_2(f)(x) = \\ &\qquad f(x) + \sum_{1 \le i \le n} \frac{\mu(p_i)}{p_i} f\left(x^{1/p_i}\right) + \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{\mu(p_ip_j)}{p_ip_j} f\left(x^{1/p_ip_j}\right) + \cdots + \frac{\mu(p_1 \cdots p_n)}{p_1 \cdots p_n} f(x^{1/p_1 \cdots p_n}). \end{aligned}$$

Como $\mu(n) = 0$ para números que contienen primos repetidos en su factorización, entonces podemos agregar a la suma anterior todos los números menores que $p_1 \cdots p_n$ tales que $\mu(n) = 0$ y así reescribir la igualdad anterior como:

$$U_{p_n} \cdots U_2(f)(x) = \sum_{n=1}^{p_1 \cdots p_n} \frac{\mu(n)}{n} f(x^{1/n}).$$

Este argumento es el mismo que se usó para deducir la ecuación 1.2.7 al final de la sección 1.2.

Por lo tanto, es claro que si hacemos $n \to \infty$, la ecuación anterior se reduce a:

$$H(f)(x) := (\lim_{n\to\infty} U_{p_n} \cdots U_3 U_2)(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} f(x^{1/n}). \tag{1.3.10}$$

Observemos que H ya no es un operador de $\mathcal{F} = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{R}\}$ porque no siempre converge la serie 1.3.10 para $x \in [0,\infty)$, para cada función $f \in \mathcal{F}$, por ejemplo si tomamos la función:

$$f(x) = \begin{cases} \mu(n) & x = 2^{1/n} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces $H(f)(2)$ es simplemente la serie de los recíprocos de los números libres de cuadrados. Como éste contiene a la serie de los recíprocos de los números primos, diverge y así la función $H(f)$ no está bien definida en $x = 2$. Por lo tanto, tenemos que restringir el dominio de H al subconjunto:

$$G = \left\{ f \in \mathcal{F} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} f(x^{1/n}) < \infty \ \forall x \in [0,\infty) \right\}.$$

Es claro que G es un subgrupo aditivo de $\mathcal{F}$ porque si $f, g \in G$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} (f+g)(x^{1/n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} f(x^{1/n}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} g(x^{1/n}) < \infty$$

y $H|_G : G \to \mathcal{F}$ es un homomorfismo de grupos. Observemos que $J(x) \in G$ porque $J(x) \equiv 0$ en el intervalo $[0,2)$ y así la serie 1.3.10 es en realidad una suma finita.

Ahora, aplicamos H a $J(x)$ usando la igualdad 1.3.7:

$$H(J)(x) = H\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \pi\left(x^{1/n}\right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} H\left(\pi\left(x^{1/n}\right)\right).$$

Como H es aditiva y la suma anterior tiene una cantidad finita de sumandos no nulos, entonces el intercambio de la suma con el morfismo H esta justificado.

Para determinar $H(J)$, necesitamos estudiar el efecto que tiene H sobre $\pi(x^{1/n})$ aplicando U_p de uno en uno. Entonces primero vemos que

$$\begin{aligned}
U_2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \pi\left(x^{1/n}\right) \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} U_2 \pi\left(x^{1/n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\pi\left(x^{1/n}\right) - \frac{1}{2}\pi\left(x^{1/2n}\right) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \pi\left(x^{1/n}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \pi\left(x^{1/2n}\right) \\
U_3 U_2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \pi\left(x^{1/n}\right) \right) &= U_3\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \pi\left(x^{1/n}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \pi\left(x^{1/2n}\right) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \pi\left(x^{1/n}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \pi\left(x^{1/2n}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} \pi\left(x^{1/3n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n} \pi\left(x^{1/6n}\right)
\end{aligned}$$

Es decir, que aplicar $U_3 U_2$ fue quitar los términos de $\sum n^{-1}\pi(x^{1/n})$ donde los índices son múltiplos de 2 o 3 y balanceando la suma agregándole los índices que se quitaron dos veces, i.e. los múltiplos de 6. Por lo tanto si aplicamos $U_{p_n} \cdots U_{p_1}$ quitamos todos los sumandos cuyos índices son múltiplos de $p_1, \ldots, p_{n-1}$ o p_n.

Por lo tanto si aplicamos H quitamos todos los sumandos cuyos índices son un múltiplo de algún primo, es decir, quitamos a todos los sumandos de $\sum n^{-1}\pi(x^{1/n})$ salvo al primer sumando referente al índice $n = 1$. Entonces podemos concluir que:

$$\begin{aligned} J(x) &= \sum \frac{1}{n}\pi\left(x^{1/n}\right) \\ \Longrightarrow H(J)(x) &= H\left(\sum \frac{1}{n}\pi\left(x^{1/n}\right)\right) \\ \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J\left(x^{1/n}\right) &= \pi(x). \end{aligned}$$

□

1.4. El análisis de Fourier de Riemann

Cuando Riemann establece la ecuación

$$\frac{\log\zeta(s)}{s} = \int_1^{\infty} J(x)x^{-s-1}dx \tag{1.4.1}$$

en la ecuación A.24, lo que hace a continuación es invertir el orden de la relación que se tiene entre $\log\zeta(s)$ y $J(x)$, es decir, de alguna manera despejar a $J(x)$ para poder expresarla en función de $\log\zeta(s)$. Al final llega a que

$$J(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log\zeta(s)}{s} y^s ds \tag{1.4.2}$$

donde la integral se toma sobre la recta $\mathrm{Re}(s) = a > 1$ [13, ecuación A.32].

Para hacer esto, él propone un método [13, líneas 70-79] para invertir el orden de la relación entre dos funciones que cumplen las condiciones que también tienen $J(x)$ y $s^{-1}\log\zeta(s)$, i.e. la ecuación 1.4.1. Este método se basa –como él lo señala– en el "teorema de Fourier" [13, línea 71], pero esto resulta ser más importante que una simple aplicación. Antes de demostrar 1.4.2, veremos de dónde viene el "teorema de Fourier" y el contexto histórico del método que propone Riemann; su propio "teorema de Fourier".

El 21 de diciembre de 1807, 19 años antes de que naciera Riemann y 52 años antes de la publicación de su artículo sobre los números primos, Joseph Fourier presentó ante la academia de París su descubrimiento de que *casi cualquier* función real periódica $F(\theta)$ se podía expresar como una serie de senos y cosenos. La función $F(\theta)$ siempre se puede reparametrizar para que tenga un periodo de 2π y así Fourier mostró que se podía escribir como

$$F(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\cos n\theta d\theta \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\sin n\theta d\theta.$$

Esta serie se llama la serie de Fourier de $F(\theta)$ y los coeficientes a_n y b_n se llaman los coeficientes de Fourier. Para una notación más moderna y resumida, usamos la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ y así tenemos

$$F(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} \qquad \text{con} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)e^{-in\theta}d\theta. \tag{1.4.3}$$

Este fue el primer avance en el análisis de Fourier.

Se estaba trabajando con funciones periódicas (de periodo 2π) y estas funciones se pueden reescribir como funciones definidas sobre el círculo unitario complejo $\mathbb{S}^1 = \left\{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\right\}$. Simplemente se hace:

$$f\left(e^{i\theta}\right) := F(\theta),$$

entonces en realidad se estaba trabajando sobre el espacio vectorial de las funciones complejas definidas sobre $\mathbb{S}^1$.

De aquí, el análisis de Fourier se generalizó a funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Los coeficientes de Fourier se generalizan a un operador lineal llamado la "transformada de Fourier"de f y se define de la siguiente manera:

$$\hat{f}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ixt}dt.$$

Con respecto a las series de Fourier, bajo ciertas condiciones, se puede expresar a f en función de sus coeficientes de Fourier (como en la ecuación 1.4.3) y en el caso general se hizo algo equivalente: recuperar la función original en términos de su transformada $\hat{f}$. Esto se llama el Teorema de Inversión de Fourier:

Teorema 5 (Inversión de Fourier)**.** *Sea f una función tal que la integral de $|f|$ y $|\hat{f}|$ sobre $\mathbb{R}$ exista, entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)e^{2\pi ixt}dx = \frac{1}{2}\left(f(t_-) + f(t_+)\right)$$

donde $f(t_\pm) := \lim_{x\to t^\pm} f(x)$*.*

Observemos que si f es continua en t, entonces el lado derecho es simplemente $f(t)$. Hemos enunciado esta versión del Teorema de Inversión de Fourier porque es el que más probablemente usó Riemann (si este no es el caso, entonces Riemann usó un teorema equivalente o más débil).

Notemos que el Teorema de Inversión de Fourier nos acerca a la "inversión" que hace Riemann:

$$\frac{\log\zeta(s)}{s} = \int_0^{\infty} J(x)x^{-s-1}dx \quad \longleftrightarrow \quad J(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log\zeta(s)}{s}x^s ds.$$

En la parte izquierda, el dominio de integración es $(0, \infty)$ a pesar de que Riemann lo escribe previamente como el intervalo $(1, \infty)$, pero como $J(x)$ es constante y vale cero en $(0, 2)$, hacer este cambio de dominio de integración es perfectamente válido. Para hacer esta inversión, era necesario que Riemann modificara la transformada de Fourier y definiera una nueva "transformada":

$$\tilde{h}(s) := \int_0^{\infty} h(x)x^{-s-1}dx.$$

Con esta modificación, Riemann demuestra un "Teorema de Inversión" referente a la nueva transformada:

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \tilde{h}(s)x^s ds, \tag{1.4.4}$$

donde $\mathrm{Re}(s) = a$ es fijo de tal manera que $\tilde{h}(s)$ sea analítica en un semiplano que contenga la recta $\mathrm{Re}(s) = a$ (este resultado aparece en la ecuación A.31).

Esta nueva transformada fue estudiada formalmente por Hjalmar Mellin [12] en 1904, 45 años después del artículo de Riemann, aunque Mellin anteriormente había usado esa transformada para estudiar fórmulas asintóticas para la función Γ, de hecho, la transformada que estudió Mellin –la que hoy en día lleva el nombre de transformada de Mellin– es un poco distinta. El signo de la s en el exponente de x en el integrando de ambas integrales es distinto; la transformada de Mellin es:

$$\bar{h}(s) := \int_0^{\infty} h(x)x^{s-1}dx = \tilde{h}(-s),$$

también hay un cambio en el signo de s en su respectivo "Teorema de inversión de Mellin". Usamos la misma notación porque ambas transformadas son esencialmente la misma.

A pesar de que Riemann fue el primero en trabajar con estas integrales como tal, Mellin fue el primero en estudiar sistemáticamente la transformada y su respectiva inversión, como lo dice Ernst Lindelöf [11] en el obituario que le hizo la revista *Acta Mathematica* a Mellin.

Es interesante notar que Riemann pasa por encima del "descubrimiento" de la transformada de Mellin, como si fuese apenas un resultado aparente o trivial del "teorema de Fourier", mientras que este descubrimiento fue una aportación sobresaliente en la matemática de otro matemático importante. No es claro, del artículo, si Riemann sabía que la nueva transformada que definió iba a ser importante o de plano pensó que no valía la pena desarrollarla más allá de lo necesario para el propósito de su artículo.

Ahora, veremos cómo Riemann deduce su teorema de inversión escrito en la ecuación 1.4.4. Esta deducción está fuera del espíritu del artículo de Riemann: él pausa el flujo del artículo y se desvía para justificar *en general* porque se vale 1.4.4. Su deducción [13, líneas 70-79] no la hace para la pareja de funciones $s^{-1}\log\zeta(s)$ y $J(x)$ sino para unas funciones $g(s)$ y $h(x)$. Ésta es la única parte del artículo en donde Riemann trata un tema con generalidad; pausa el flujo del artículo para demostrar un lema y por esto metemos el análisis de esta parte en los preliminares.

Primero demostraremos la validez del método de Riemann (i.e. su teorema de inversión) usando notación moderna, después analizaremos textualmente el artículo apoyándonos en la demostración moderna para entender los argumentos de Riemann.

Riemann empieza con la suposición de que la ecuación

$$g(s)=\int_0^\infty h(x)x^{-s}d\log x=\int_0^\infty h(x)x^{-s-1}dx \tag{1.4.5}$$

es válida para $\mathrm{Re}(s)=a>1$ fija. Observemos que aquí, $g(s)$ toma el papel de la nueva transformada $\tilde{h}(s)$. Riemann aplica directamente el teorema de inversión de Fourier a esta expresión, pero para hacer esto llevamos la integral a una integral sobre todo $\mathbb{R}$ con el cambio de variable $2\pi u=\log x$. Bajo este cambio, la integral anterior queda como

$$g(s)=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}h\left(e^{2\pi u}\right)e^{-2\pi us}du.$$

Este cambio se puede hacer ya que $x>0$. Si escribimos a s como $a+ib$ entonces la integral anterior queda de la siguiente manera:

$$g(a+ib)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{2\pi h\left(e^{2\pi u}\right)e^{-2\pi ua}\right\}e^{-2\pi iub}du.$$

Como $\mathrm{Re}(s)=a$ es fija, entonces la expresión dentro de los corchetes es una función que sólo depende de u. Si la denotamos por $f(u)$, entonces tendremos que

$$g(a+ib)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-2\pi iub}du.$$

Ahora, $g(a+ib)$ es en realidad una función que depende sólo de b, entonces tenemos que $g(a+ib)=g(b)$ es la transformada de Fourier de $f(u)$.

Para el caso de Riemann, $h(e^{2\pi u})$ es su función contadora de primos que cumple $J(x)\leq x$, por lo tanto $h(e^{2\pi u})\leq e^{2\pi u}$, así $f(u)\leq 2\pi e^{2\pi u(1-a)}$. Como habíamos supuesto que $a>1$, entonces el exponente es negativo y así $|f(u)|$ es integrable cerca del $+\infty$. Ahora, cerca de $-\infty$, la función $h(e^{2\pi u})$ es la constante cero porque para u cerca de $-\infty$, tenemos $e^{2\pi u}<2$ y así $J(e^{2\pi u})\equiv 0$, por lo tanto $|f(u)|$ es integrable cerca del $-\infty$. Por lo tanto podemos aplicar el Teorema de inversión de Fourier a la pareja $g(a+ib)=g(b)$ y $f(u)$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}f(u)=&\int_{-\infty}^{\infty}g(a+ib)e^{2\pi iub}db\\ h\left(e^{2\pi u}\right)=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(a+ib)e^{2\pi u(a+ib)}db.\end{aligned}$$

Si volvemos a escribir $2\pi u=\log x$ tendremos

$$h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(a+ib)x^{a+ib}db,$$

por último escribimos $s=a+ib$ con $-ids=db$ y obtenemos lo que queríamos:

$$h(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}g(s)x^s ds$$

que es a lo que llega Riemann en la ecuación A.31.

El procedimiento de Riemann es un poco distinto en notación y forma de exposición pero es esencialmente el procedimiento anterior. En lugar de usar x^{-ib}, Riemann usa la fórmula de Euler y escribe

$$x^{-ib} = e^{-ib\log x} = \cos(b\log x) - i\sin(b\log x).$$

De hecho, él separa la primera fórmula 1.4.5 para $g(s)$ en su parte real e imaginaria [13, línea 72]:

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_0^\infty h(x)x^{-s}d\log x = \int_0^\infty h(x)x^{-a-ib}d\log x \\ g(a+ib) &= \int_0^\infty h(x)x^{-a}(\cos(b\log x) - i\sin(b\log x))d\log x \\ &= \int_0^\infty h(x)x^{-a}\cos(b\log x)d\log x - i\int_0^\infty h(x)x^{-a}\sin(b\log x)d\log x. \end{aligned}$$

A estas partes las denota por $g_1(b)$, para la parte real, y $g_2(b)$ para la parte imaginaria de $g(a+ib)$; son justo estas las fórmulas que escribe [13, ecuaciones A.28 y A.29]. Él hace esto porque el Teorema de inversión de Fourier es formalmente para funciones de una variable real.

Lo que hace a continuación es multiplicar cada $g_i(b)$ por

$$(\cos(b\log x) + i\sin(b\log x))db = x^{ib}db$$

e integra de $-\infty$ a$+\infty$ [13, líneas 73-74]. Después de esta multiplicación obtiene las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty g_1(b)x^{ib}db &= \int_{-\infty}^\infty \left(\int_0^\infty h(x)x^{-a}\cos(b\log x)d\log x\right)x^{ib}db \\ i\int_{-\infty}^\infty g_2(b)x^{ib}db &= -i\int_{-\infty}^\infty \left(\int_0^\infty h(x)x^{-a}\sin(b\log x)d\log x\right)x^{ib}db. \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Si tomamos otra vez $x = e^{2\pi u}$, entonces ambas ecuaciones se juntan (mediante la fórmula de Euler) en algo de la forma

$$\int_{-\infty}^\infty g(b)e^{2\pi iub}db = \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty \left\{2\pi h\left(e^{2\pi u}\right)e^{-2\pi ua}\right\}e^{-2\pi iub}du\right)e^{2\pi iub}db$$

que es la formulación del teorema de inversión de Fourier:

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(u)e^{2\pi iux}du = \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-2\pi iut}dt\right)e^{2\pi iux}du,$$

por eso Riemann dice que los lados derechos de las ecuaciones 1.4.6 se reducen a $\pi h(x)x^{-a}$ [13, líneas 74-75]. Observemos que, como él separa la parte real e imaginaria de $g(s)$, sólo aparece π y no 2π como cuando nosotros usamos la fórmula de Euler. Después de esto, Riemann vuelve a juntar la parte real e imaginaria de $g(s)$ y despeja el término x^{-a} para obtener el resultado final [13, línea 75]. Por lo tanto, para $g(s)$ y $h(x)$ que cumplen "condiciones suficientes", como la pareja $s^{-1}\log\zeta(s)$ y $J(x)$, se tiene el teorema de inversión particular:

$$g(s) = \int_0^\infty h(x)x^{-s-1}dx \quad\longleftrightarrow\quad h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} g(s)x^s ds.$$

En particular concluimos, como Riemann, que

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log\zeta(s)}{s}x^s ds \tag{1.4.7}$$

es válido para $\mathrm{Re}(s) = a > 1$ y $x > 0$.

Riemann vuelve a usar, aunque más sutilmente, esta misma transformada para evaluar una expresión que aparece más tarde en el artículo. Usa su teorema de inversión para la pareja

$$g(s) = \frac{1}{s-\beta} \qquad h(x) = \begin{cases} x^\beta & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}.$$

Aquí, β es un complejo tal que $\mathrm{Re}(\beta) < \mathrm{Re}(s) = a$. Para poder afirmar que sí se puede usar el teorema de inversión que dedujo Riemann sólo basta ver que

$$\int_0^\infty h(x)x^{-s-1}dx = \int_1^\infty x^\beta x^{-s-1}dx = \left[\frac{x^{\beta-s}}{\beta-s}\right]_1^\infty = -\frac{1}{\beta-s} = g(s),$$

donde $\mathrm{Re}(\beta - s) < 0$ por nuestra selección del número complejo β.

Para ver que $h(x)$ satisface las condiciones del teorema de inversión de Riemann, observemos que, en la demostración anterior, aplicamos la inversión de Fourier a la función $2\pi h\left(e^{2\pi u}\right)e^{-2\pi ua}$. Cerca de $+\infty$, tenemos que

$$2\pi h\left(e^{2\pi u}\right)e^{-2\pi ua} = 2\pi e^{2\pi u(\beta-a)}$$

y como $\mathrm{Re}(\beta) < a$, entonces la función $2\pi h\left(e^{2\pi u}\right)e^{-2\pi ua}$ es integrable cerca de $+\infty$. Por último, cerca de $-\infty$, $e^{2\pi u} < 1$ y así $h\left(e^{2\pi u}\right)$ es la constante 0, por lo tanto también es integrable cerca de $-\infty$.

Con estos dos resultados vemos que $\left|2\pi h\left(e^{2\pi u}\right)e^{-2\pi ua}\right|$ es integrable sobre todo $\mathbb{R}$ y así se puede aplicar el teorema de inversión de Fourier, y por lo tanto se puede aplicar el teorema de inversión que deduce Riemann para la pareja $g(s)$ y $h(x)$. Concluimos con la fórmula importante

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{s-\beta}x^s ds = \begin{cases} x^\beta & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \qquad (\mathrm{Re}(\beta) < a) \tag{1.4.8}$$

que usará en las ecuaciones A.39 y A.40 para evaluar un término que aparece en 1.4.7.[14]

1.5. La integral logarítmica

En el artículo de Riemann, la integral logarítmica $\mathrm{Li}(x)$ aparece como la culminación del cálculo de la expresión analítica para $J(x)$. Es interesante leer cómo Riemann extiende la integral logarítmica (originalmente una función real) a un dominio complejo sin mencionar un solo paso de este proceso [13, líneas 91-100]. Aquí escribimos este proceso para que cuando se lea el artículo podamos manejar la integral logarítmica con la facilidad con la que Riemann la usa en su artículo.

La integral logarítmica se define para $x \geq 0$ como

$$\mathrm{Li}(x) := \text{v.p.c}\int_0^x \frac{dt}{\log t} = \begin{cases} \int_0^x \frac{dt}{\log t} & \text{si } x < 1 \\ \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\log t}\right] & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

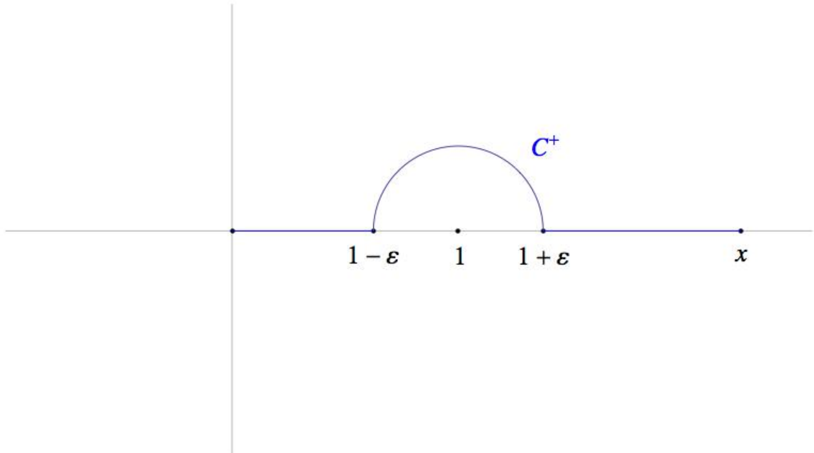
donde v.p.c se refiere al valor principal de Cauchy. El integrando tiene dos puntos importantes: $t = 0, 1$. Cuando $t = 0$, tenemos que $\log t = -\infty$ y así el cociente se hace cero. Cerca del cero (del lado derecho) el integrando (y así la integral) es negativo. El otro punto importante es cuando $t = 1$. El denominador se hace cero y tenemos un polo. Este polo se traduce a un valor infinito de la integral porque cuando x es cercano a 1, $\log x$ es de orden lineal:

$$x \approx 1 \implies \log x \approx x - 1.$$

Por lo tanto $(\log x)^{-1} = \mathcal{O}(x^{-1})$ y así la integral se hace infinita.

[14] Es interesante notar que la ecuación 1.4.8 se parece mucho a la fórmula integral de Cauchy $f(a) = \int_C \frac{f(s)ds}{s-a}$ donde C es una curva cerrada que rodea al punto $s = a$, para la función $f(s) = x^s$. Es claro que en 1.4.8 el contorno es una recta vertical infinita, pero se puede deducir esta fórmula usando la fórmula integral de Cauchy y el contorno que es un semicírculo con el segmento de $a - iT$ a $a + iT$ como diámetro, con radio $2T$ y con centro en a encerrando a $s = \beta$ para alguna T suficientemente grande. De aquí se hace $T \to \infty$ y se deduce 1.4.8.

Figura 1.5.1: Contorno de integración para Li(x)



Podemos concluir que Li(0) = 0 y Li(1) = $-\infty$. Ahora, fuera del punto $x = 1$, el Teorema Fundamental del cálculo nos dice que

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Li}(x) = \frac{1}{\log x}$$

lo que nos dice que para $x > 1$, la derivada de Li(x) es positiva y así Li(x) es creciente. Por otro lado para $x > 1$, tenemos que

$$\log x \approx \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{t} dt < \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\log t},$$

entonces es claro que Li(x) $\to \infty$ cuando $x \to \infty$.

En el dominio real ($\mathbb{R}$), Li(x) es una función complicada de manipular porque es una integral divergente cerca de $x = 1$. Entonces lo llevamos al dominio complejo para ver si podemos reescribir la integral en otra más manejable.

La integral logarítmica es básicamente integrar, sobre un subintervalo $[0, x]$ del eje real, a la función $1/\log z$ pero en la práctica no podemos pasar por el punto $z = 1$. Entonces nos metemos al plano complejo y rodeamos este punto singular mediante un semicírculo como en la figura 1.5.1.

Al camino que pasa por *encima* de $z = 1$ la llamamos C^+. Notemos que C^+ depende de x, entonces $C^+ = C^+(x)$, pero suprimimos esta notación cuando es clara por el contexto. Si pasamos por abajo del punto $z = 1$, a la trayectoria la llamaremos C^-, de hecho, podemos pensar en C^- como el conjugado de C^+.

Para ver que la integral compleja sobre C^+ sí es un buen candidato para reescribir la integral logarítmica, observemos que si $1 > \varepsilon > 0$ (como en la figura 1.5.1) y hacemos $\varepsilon \to 0$ por el lado derecho, la integral

$$\int_{C^+} \frac{dz}{\log z}$$

no cambia de valor porque para cada $1 > \varepsilon > 0$, las C^+ resultantes se pueden deformar contínuamente de una en otra. Por lo tanto la integral anterior *no* depende de ε y es por esto que la curva C^+ no se etiqueta con una ε.

Otra observación importante es que si nos vamos por C^- en lugar de C^+, el valor de la integral va a cambiar porque para pasar de C^+ a C^- contínuamente es necesario pasar por $z = 1$ y esto no se puede hacer en el dominio del integrando $1/\log z$. Más adelante veremos cuál es la diferencia entre los valores de la integral según el camino que tomamos.

Ahora calculamos cuánto vale la integral sobre C^+. Separamos al contorno C^+ en sus tres partes principales: dos rectas y un semicírculo orientado negativamente. Primero recorremos del cero a $1 - \varepsilon$ sobre el eje real, luego recorremos el semicírculo con centro en 1 y radio ε en sentido negativo hasta el punto $1 + \varepsilon$ y de ahí nos vamos sobre el eje real hasta x. Al semicírculo lo denotamos por γ^+. Si hacemos

$\varepsilon \to 0$, entonces tendremos que:

$$\begin{aligned}
\int_{C^+} \frac{dz}{\log z} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{C^+} \frac{dz}{\log z} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dz}{\log z} + \int_{\gamma^+} \frac{dz}{\log z} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dz}{\log z} \right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dz}{\log z} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dz}{\log z} \right] + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\gamma^+} \frac{dz}{\log z} \\
&= \mathrm{Li}(x) + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\gamma^+} \frac{dz}{\log z}.
\end{aligned}$$

Sólo nos falta evaluar la integral sobre γ^+. Intuitivamente, cerca de $z = 1$, la función $\log z$ se comporta como la función $z - 1$, entonces si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño se debería de poder hacer

$$\int_{\gamma^+} \frac{dz}{\log z} \approx \int_{\gamma^+} \frac{dz}{z-1}. \tag{1.5.1}$$

Ahora, si parametrizamos γ^+ con $z = 1 + \varepsilon e^{i\theta}$ donde θ va de π a 0, entonces

$$\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z-1} = \int_{\pi}^{0} \frac{\varepsilon i e^{i\theta} d\theta}{(1+\varepsilon e^{i\theta}) - 1} = -i \int_0^{\pi} d\theta = -i\pi.$$

Si hacemos el límite cuando $\varepsilon \to 0$, tendremos la igualdad en 1.5.1. Por lo tanto

$$\int_{C^+} \frac{dz}{\log z} = \mathrm{Li}(x) - i\pi$$

y así podríamos definir la integral logarítmica como

$$\mathrm{Li}(x) := \int_{C^+} \frac{dz}{\log z} + i\pi.$$

Observemos que si hubiéramos integrado sobre C^-, se hacen los mismo cálculos salvo que γ^- se parametriza con $1 + \varepsilon e^{i\theta}$ donde θ va de $-\pi$ a 0 y así la constante que nos sale es la misma salvo un cambio de signo:

$$\mathrm{Li}(x) = \int_{C^-} \frac{dz}{\log z} - i\pi.$$

Es importante notar que el valor de la integral de $dz/\log z$ cambia por $2\pi i$ si se cambia del contorno C^+ al contorno C^- y viceversa.

Esta integral compleja no es la que aparece en el artículo de Riemann. La que aparece es [13, ecuación A.43]

$$\int_0^x \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz$$

donde la notación de Riemann se refiere a señalizar una trayectoria que va de 0 a x sobre el eje real salvo una desviación pequeña hacia el plano complejo para evitar el 1. Esta última integral generaliza la integral que habíamos estado estudiando que es el caso particular de $\beta = 1$.

Al parecer, la integral anterior ya no se parece a la integral logarítmica, pero hay un proceso sencillo para relacionarlas. Primero fijamos $x > 1$ y definimos

$$G^+(\beta) := \int_{C^+} \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz$$

y similarmente para $G^-(\beta)$ donde la integración se hace sobre C^-. La integral sólo tiene un punto problemático $z = 0$, porque el contorno no pasa por el otro punto $z = 1$ posiblemente problemático. Tenemos que la norma del integrando, cerca de $z = 0$, cumple

$$\left| \frac{z^{\beta-1}}{\log z} \right| = \frac{z^{\mathrm{Re}(\beta)-1}}{-\log z}$$

porque cercano al cero, $z \in C^+$ toma valores reales. Observemos que el denominador se hace $-\infty$ entonces si pedimos que $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, la integral converge, por lo tanto la integral

$$\int_{C^+} \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz$$

está bien definida en el semiplano $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. Lo mismo sucede para la función $G^-(\beta)$.

Para demostrar que define una función analítica de β, usamos el Teorema de Morera. Sea σ una curva cerrada en el semiplano $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. Entonces

$$\int_\sigma G^+(\beta) d\beta = \int_\sigma \int_{C^+} \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz d\beta = \int_{C^+} \frac{1}{\log z} \left(\int_\sigma z^{\beta-1} d\beta \right) dz$$

donde el intercambio del orden de integración se puede hacer porque ambas son integrales de funciones continuas sobre conjuntos compactos. Como $z^{\beta-1}$ es una función analítica de β en el semiplano $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, entonces el Teorema de Cauchy nos dice que su integral sobre cualquier curva cerrada es 0. Por lo tanto

$$\int_\sigma G^+(\beta) d\beta = 0$$

para todo σ. Con el teorema de Morera concluimos que $G^+(\beta)$ es analítica en el semiplano $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. Este hecho nos permite calcular la derivada de $G^+(\beta)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} G^+(\beta) &= \frac{d}{d\beta} \left\{ \int_{C^+} \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz \right\} = \int_{C^+} \frac{d}{d\beta} \left\{ \frac{z^{\beta-1}}{\log z} \right\} dz \\ &= \int_{C^+} \frac{1}{\log z} \frac{d}{d\beta} \left\{ e^{(\beta-1)\log z} \right\} dz = \int_{C^+} \frac{\log z}{\log z} e^{(\beta-1)\log z} dz \\ &= \int_{C^+} z^{\beta-1} dz. \end{aligned}$$

Como $|z^{\beta-1}| = z^{\mathrm{Re}(\beta)-1}$ y $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, la integral anterior siempre converge porque podemos deformar el contorno C^+ hacia el eje real porque $z = 1$ ya no es una singularidad del integrando. Después de esto, obtendremos una integral real elemental. Por lo tanto

$$\frac{d}{d\beta} G^+(\beta) = \left[\frac{z^\beta}{\beta} \right]_0^x = \frac{1}{\beta} x^\beta. \tag{1.5.2}$$

Esta fórmula es *muy* importante para el artículo pues permite reescribir la fórmula para $J(x)$ que deduce Riemann a lo largo de su artículo en términos más elementales (en particular, de la integral logarítmica).

Todo esto se ve muy bien, pero ¿qué tiene que ver $G^+(\beta)$ con $\mathrm{Li}(x)$? Volvemos a fijar $x > 1$ y consideremos, por el momento $\beta > 0$ un real. Consideremos el cambio de variable $u = z^\beta$ con $\log u = \beta \log z$, entonces tenemos que $dz/z = du/u\beta$. Por lo tanto

$$G^+(\beta) = \int_{C^+} \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz = \int_{C^+} \frac{z^\beta}{\log z} \frac{dz}{z} = \int_{[C^+]^\beta} \frac{\beta u}{\log u} \frac{du}{u\beta} = \int_{[C^+]^\beta} \frac{du}{\log u}$$

donde $[C^+]^\beta$ es el contorno que sale de elevar cada elemento del contorno C^+ a la β. Entonces el contorno $[C^+]^\beta$ empieza en 0 y recorre el eje real hasta $(1-\varepsilon)^\beta$, rodea el 1 en sentido negativo hasta el punto $(1+\varepsilon)^\beta$ y de ahí recorre el eje real hasta el punto x^β. Para ver esto bien, observemos que cuando β es real, las partes de C^+ que están sobre el eje real se mapean al eje real bajo la función z^β. La única parte que falta ver bien es el semicírculo γ^+. La función z^β hace $|z| \mapsto |z|^\beta$ y $\arg z \mapsto \beta \arg z$. Entonces, si el semicírculo es suficientemente pequeño, $|z| \approx 1$ y así $|z|^\beta \approx 1$. Similarmente, $\arg z \approx 0$ pues z está muy cercano al eje real, entonces $\beta \arg z \approx 0$. Con estos dos argumentos podemos afirmar que el semicírculo se mapea a una curva que empieza en $(1-\varepsilon)^\beta$ y termina en $(1+\varepsilon)^\beta$ que *no* le da una vuelta completa al 1 porque $\arg\left(z^\beta\right) = \beta \arg z \geq 0$ pues $\beta > 0$ y así z^β siempre queda por encima del 1.

Concluimos que $[C^{+}]^{\beta}$ es casi idéntico a C^{+} y con el Teorema de Cauchy, es lo mismo integrar sobre $[C^{+}]^{\beta}$ que sobre C^{+}. Por lo tanto

$$G^{+}(\beta) = \int_{C^{+}} \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz = \int_{[C^{+}]^{\beta}} \frac{du}{\log u} = \mathrm{Li}\left(x^{\beta}\right) - i\pi.$$

Con esto podemos definir

$$\mathrm{Li}\left(x^{\beta}\right) := i\pi + \int_{C^{+}} \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz$$

e idénticamente

$$\mathrm{Li}\left(x^{1-\beta}\right) := -i\pi + \int_{C^{-}} \frac{z^{-\beta}}{\log z} dz$$

cuando $1-\beta > 0$. Este cálculo fue para $\beta > 0$ real (o para $1-\beta > 0$ real), pero como las integrales convergen en los semiplanos $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ y $\mathrm{Re}(\beta) < 1$, entonces las fórmulas anteriores representan extensiones analíticas triviales de $\mathrm{Li}\left(x^{\beta}\right)$ y $\mathrm{Li}\left(x^{1-\beta}\right)$ a los semiplanos $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ y $\mathrm{Re}(\beta) < 1$ respectivamente. Por lo tanto tenemos las siguientes extensiones analíticas para $x > 1$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}\left(x^{\beta}\right) &= i\pi + \int_{C^{+}} \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz \qquad \mathrm{Re}(\beta) > 0 \\ \mathrm{Li}\left(x^{1-\beta}\right) &= -i\pi + \int_{C^{-}} \frac{z^{-\beta}}{\log z} dz \qquad \mathrm{Re}(\beta) < 1. \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

La razón para usar C^{-} en la extensión de $\mathrm{Li}\left(x^{1-\beta}\right)$ se entiende al final del artículo cuando Riemann evalúa las integrales que aparecen en su fórmula para $J(x)$. Observemos que, por virtud de 1.5.2, la derivada de $\mathrm{Li}\left(x^{\beta}\right)$ es $\frac{1}{\beta}x^{\beta}$.

1.6. Un caso particular de las funciones Θ de Jacobi

Hoy, las funciones θ de Jacobi son una clase de funciones de varias variables complejas que tienen muchas propiedades de simetría. La forma general se define como:

$$\Theta(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}$$

donde la serie converge para toda $z \in \mathbb{C}$ y para toda $\mathrm{Im}(\tau) > 0$, es decir, para τ en el semiplano superior del plano complejo.[15] La serie anterior se define como:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n.$$

Históricamente, la función Θ no apareció con su definición moderna, pero ciertos casos particulares fueron estudiados por Carl Gustav Jacob Jacobi en su libro “Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum” en 1829 [10]. El caso particular que vamos a estudiar es la función:

$$\vartheta(x) := \Theta(0, ix) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

donde $x > 0$ para que ix efectivamente esté en el semiplano superior.

De hecho, Riemann (en su artículo) usa una versión distinta de $\vartheta(x)$ que aparece naturalmente al demostrar la ecuación funcional de $\zeta(s)$. En el artículo aparece la función:

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

[15] Este hecho no lo demostramos porque no es necesario para este trabajo pero se puede verificar en libros de variable compleja en varias variables.

cuya serie converge para todo valor $x > 0$ porque la cola de la serie está claramente dominada por $\sum n^{-2}$.

Observemos que $\Psi(x)$ es como la "mitad" de $\vartheta(x)$, efectivamente:

$$1 + 2\Psi(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(-n)^2 x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = \vartheta(x)$$

$$\therefore \qquad 1 + 2\Psi(x) = \vartheta(x) \quad \iff \quad \Psi(x) = \frac{1}{2}\vartheta(x) - \frac{1}{2}. \tag{1.6.1}$$

Aquí hacemos una pausa para verificar algunas propiedades básicas de $\Psi(x)$.

Definimos un subespacio de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciables, que se llama el espacio de Schwartz y se denota por $S(\mathbb{R})$. Definimos que $f \in S(\mathbb{R})$ cuando cada derivada de f decrece a 0 más rápido que cualquier potencia x^{-t} para toda $t \geq 0$, es decir:

$$\lim_{|x|\to\infty} \left| \frac{f^{(n)}(x)}{x^t} \right| = 0 \qquad \forall t \geq 0 \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

Estas funciones se comportan muy bien: son claramente integrables sobre $\mathbb{R}$ y forman un subespacio de $C^{\infty}(\mathbb{R})$. Por ejemplo, como $\Psi(x)$ está definida para $x > 0$, restringimos el espacio de Schwartz a $\mathbb{R}^+$ y obtenemos $\Psi(x) \in S(\mathbb{R}^+)$. Para ver esto hay que calcular la k-ésima derivada de $\Psi(x)$. Empezamos con la k-ésima derivada de los sumandos de la definición de $\Psi(x)$:

$$\frac{d^k}{dx^k} e^{-\pi n^2 x} = (-\pi)^k n^{2k} e^{-\pi n^2 x}$$

entonces la serie de derivadas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k} e^{-n^2 x} = (-\pi)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} e^{-\pi n^2 x}$$

converge uniformemente sobre cualquier compacto K en $\mathbb{R}^+$, también sobre intervalos de la forma $[\varepsilon, \infty)$ con $\varepsilon > 0$, porque

$$\left| n^{2k} e^{-\pi n^2 x} \right| \leq n^{2k} e^{-\pi n^2 \varepsilon} \leq \frac{1}{n^2}$$

para n suficientemente grande, donde $\varepsilon < x$ para todo $x \in K$. Así podemos aplicar la prueba M de Weierstrass para confirmar la convergencia uniforme de la serie de las k-ésimas derivadas. Por lo tanto podemos intercambiar la derivada con la serie para concluir:

$$\frac{d^k}{dx^k}\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\pi)^k n^{2k} e^{-\pi n^2 x}$$

para todo $x > 0$.

Ahora hay que verificar que el orden de $\Psi^{(k)}(x)$ sea mayor que el orden de x^{-t} para $t \geq 0$ arbitraria. Calculamos el límite:

$$x^{-t}\frac{d^k}{dx^k}\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\pi)^k n^{2k} e^{-\pi n^2 x} x^{-t}.$$

Como la serie sigue convergiendo uniformemente (pues $e^{-n^2 x}x^{-t} \to 0$ cuando $|x| \to \infty$) podemos hacer

$$\begin{aligned}
\lim_{|x|\to\infty} \left| x^{-t}\frac{d^k}{dx^k}\Psi(x) \right| &= \lim_{|x|\to\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-\pi)^k n^{2k} e^{-n^2 x} x^{-t} \right| \\
&\leq \pi^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} \lim_{|x|\to\infty} \left| e^{-n^2 x} x^{-t} \right| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

El intercambio del límite y la serie se puede hacer porque para $|x|$ suficientemente grande, se tiene que $x \in [\varepsilon, \infty)$ para alguna $\varepsilon > 0$ donde la serie converge uniformemente.

Por lo tanto $\Psi(x) \in S(\mathbb{R}^+)$. Esta propiedad es importante para justificar cuestiones de convergencia más adelante. Ahora regresamos al artículo de Riemann.

Para demostrar (por segunda vez) la ecuación funcional de $\zeta(s)$, Riemann usa un resultado de Jacobi de la sección 65 del "Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum" que da una ecuación funcional para $\Psi(x)$. Riemann lo escribe como:

$$\frac{1+2\Psi(x)}{1+2\Psi(x^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

o, si usamos la notación de la función ϑ,

$$\frac{\vartheta(x)}{\vartheta(x^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Aquí lo demostraremos usando resultados básicos del análisis de Fourier. Enunciamos dos lemas que necesitaremos.

Lema 6. *Para toda $u \in \mathbb{C}$ se tiene que*

$$e^{-\pi u^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{2\pi i x u} dx.$$

Demostración. Primero sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$$

porque con un cambio de coordenadas polares tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-\pi y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\theta = 1.\end{aligned}$$

En la primera integral hacemos el cambio de variable $x = y - iu$ y vemos que el contorno original (el eje real) se cambia a un nuevo contorno que resulta ser una recta vertical en el plano complejo. Este cambio de contorno es una homotopía entre ambas rectas pues la función $e^{-\pi x^2}$ no tiene singularidades, por lo tanto el Teorema de Cauchy garantiza que las integrales no cambian de valor. Si desarrollamos la nueva integral obtenemos lo que queremos:

$$\begin{aligned}1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx &= \int_{-\infty+iu}^{\infty+iu} e^{-\pi(y-iu)^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(y-iu)^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\left(y^2-2iuy-u^2\right)} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} e^{2\pi i u y} e^{\pi u^2} dy \\ \therefore \quad e^{-\pi u^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} e^{2\pi i u y} dy.\end{aligned}$$

□

En el siguiente lema no demostramos todos los resultados de series de Fourier que se usan, pero se escribe una demostración formal. También se pueden reducir las hipótesis del Lema a unas menos fuertes pero para este caso es suficiente.

Lema 7. *(fórmula de la sumación de Poisson) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función en el espacio $S(\mathbb{R})$. Entonces si hacemos*

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i x u} dx,$$

podemos concluir que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n).$$

Demostración. Este lema se demuestra usando herramienta de series de Fourier aplicadas a la función $F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x+n)$ que tiene periodo 1 porque

$$F(x+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+(n+1)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = F(x).$$

Una función que cumple esto junto con lo que habíamos pedido para $f(x)$ (suavidad y convergencia rápida al cero cuando $x \to \infty$), se puede expresar, según la teoría de las series de Fourier (véase la sección 1.4 y la fórmula 1.4.3), como:[16]

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i x n}$$

donde

$$a_n := \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_0^1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m) e^{-2\pi i n x} dx.$$

La convergencia uniforme de la serie nos permite intercambiar la suma con la integral. Después hacemos el cambio $x+m=y$ y obtenemos

$$\begin{aligned} a_n &:= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_m^{m+1} f(y) e^{-2\pi i n (y-m)} dy \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n m} \int_m^{m+1} f(y) e^{-2\pi i n y} dy. \end{aligned}$$

donde $e^{2\pi i n m} = 1$. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_m^{m+1} f(y) e^{-2\pi i n y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i n y} dy \\ &= \hat{f}(-n). \end{aligned}$$

Con esto concluimos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(-n) e^{2\pi i x n}$$

y si hacemos $x=0$ obtenemos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = F(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n).$$

□

Con estos dos lemas podemos demostrar la ecuación funcional de $\vartheta(x)$:

Teorema 8. *Para $x > 0$ tenemos que $\vartheta(x)\sqrt{x} = \vartheta\left(x^{-1}\right)$ y así*

$$\frac{1+2\Psi(x)}{1+2\Psi(x^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

[16] Como $\sum f(x+n)$ sólo toma valores distintos cuando $x \in [0,1)$, se puede encontrar una constante $M > 0$ tal que, $\sum f(x+n) \leq M \sum f(n)$ entonces la serie converge uniformemente porque $f(n)$ decrece muy rápido conforme va creciendo $|n|$.

Demostración. Observemos que la función $g(y) = e^{-\pi y^2}$ está claramente en $S(\mathbb{R})$ y que el Lema 6 nos dice que su transformada de Fourier es ella misma:

$$\hat{g}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} e^{2\pi i y u} dy = e^{-\pi u^2} = g(u).$$

Ahora, sabemos que integrar sobre $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de "dilatación":

$$\delta \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy$$

donde $\delta > 0$ (esto se sigue inmediatamente del cambio de variable $x \leftrightarrow \delta x$). Entonces, si en lugar de usar $g(y)$ usamos $g(y\sqrt{x})$, es decir "dilatamos" la integral –de la definición de la transformada de Fourier– con un factor positivo $\delta = \sqrt{x}$ (para $x > 0$), es claro que

$$\widehat{g(u\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}} \hat{g}\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\pi u^2 x^{-1}}. \tag{1.6.2}$$

Por otro lado, la definición de ϑ nos dice que

$$\vartheta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\sqrt{x}),$$

entonces si aplicamos la fórmula de sumación de Poisson a $g(n\sqrt{x})$, junto con 1.6.2 obtenemos lo que queremos:

$$\begin{aligned} \vartheta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\sqrt{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{g(n\sqrt{x})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\pi n^2 x^{-1}} \\ = \frac{1}{\sqrt{x}} \vartheta(x^{-1}). \end{aligned}$$

$\square$

Cabe mencionar una última cosa de $\Psi(x)$. Si sustituimos x por cualquier complejo z obtenemos

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi z} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| e^{-n^2 \pi z} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi \mathrm{Re}(z)},$$

por lo tanto $\Psi(x)$ se extiende naturalmente al semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Capítulo 2

El artículo de Riemann

2.1. Extensión analítica de $\sum n^{-s}$

La relación entre $\sum n^{-s}$ y $\prod (1-p^{-s})^{-1}$ es lo que motiva un estudio analítico de $\sum n^{-s}$ para ver si esto arroja resultados sobre los números primos. La extensión analítica que hace Riemann es del estilo de Euler cuando él extiende la función factorial; a diferencia del estilo analítico de Weierstrass y su proceso de continuación analítica por pedazos con series convergentes. Entonces el método de Riemann se parece al método de Euler en el sentido de encontrar una expresión que "always remains valid" [13, línea 10], i.e. una fórmula para toda $s \in \mathbb{C}$ que, restringida al dominio original, coincide con la función original. Esta fórmula la denota por $\zeta(s)$. Por lo pronto al principio del artículo $\zeta(s) := \sum n^{-s}$ y es una función definida en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Lo primero que hace Riemann [13, línea 11] es tomar la forma integral de $\Pi(s-1)$ y hace el cambio de variable $y = nx$ (con $dy = ndx$) para obtener:

$$\begin{aligned} \Pi(s-1) &= \int_0^\infty e^{-y} y^{s-1} dy = \int_{n\cdot 0}^{n\cdot\infty} e^{-nx} (nx)^{s-1} ndx \\ &= \int_0^\infty e^{-nx} n^s x^{s-1} dx \\ \therefore \quad \frac{1}{n^s}\Pi(s-1) &= \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx \end{aligned}$$

donde tomamos $s > 1$ para que se pueda pensar en $\zeta(s)$ y tomamos $n \geq 1$.

Ahora, Riemann suma la igualdad sobre todos los naturales positivos para obtener [13, ecuación A.2]:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\Pi(s-1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx \\ \Pi(s-1)\zeta(s) &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx. \end{aligned}$$

El intercambio de la integral y la serie se puede justificar con el Teorema de Convergencia Monótona[1] si definimos

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} e^{-nx} x^{s-1} = x^{s-1} \sum_{n=1}^{N} e^{-nx}.$$

Como $e^{-nx} \geq 0$ para toda n y x, tenemos que $f_N(x)$ es una sucesión no decreciente porque siempre estamos sumando cantidades no negativas, i.e. $f_N(x) \leq f_{N+1}(x)$ para toda $x \in (0,\infty)$. Por otro lado tenemos que

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = \lim_{N\to\infty} x^{s-1} \sum_{n=1}^{N} \left(e^{-x}\right)^n = x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

[1]Dada una sucesión $\{f_N\}$de funciones integrables con $f_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ de tal manera que $f_N \leq f_{N+1}$ para toda $N \in \mathbb{N}$ y $\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_N < \infty$ entonces $f := \sup_{N\in\mathbb{N}} f_N$ es integrable y $\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_N$.

donde $r = e^{-x} < 1$ para toda $x \in (0, \infty)$. Entonces tenemos una serie geométrica convergente sin el primer término:

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} f_N(x) &= x^{s-1}\left(\frac{1}{1-r} - 1\right) = x^{s-1}\left(\frac{r}{1-r}\right) = x^{s-1}\frac{1}{r^{-1}-1} \\ &= \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} =: f(x).\end{aligned}$$

Por último:

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty f_N(x)dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx = \Pi(s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

$$\therefore \quad \lim_{N\to\infty}\int_0^\infty f_N(x)dx < \infty \iff \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Por lo tanto, para $s > 1$, $\lim \int f_N < \infty$ y podemos aplicar el Teorema de la Convergencia monótona para concluir que

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty f_N(x)dx &= \int_0^\infty f(x)dx \\ \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx &= \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Por lo tanto obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx = \Pi(s-1)\zeta(s) \qquad (s > 1) \tag{2.1.2}$$

que es la ecuación que obtiene Riemann (ecuación A.3).

El propósito de deducir la igualdad anterior es reescribir $\zeta(s)$ en términos de otras funciones más sencillas de manejar analíticamente. El lado izquierdo es una función de s que está bien definida en el semiplano derecho $\operatorname{Re}(s) > 1$. Ahora, Reimann quiere reescribir esa integral para que induzca una función de s que sea analítica en todo el plano complejo y que, restringida al semiplano $\operatorname{Re}(s) > 1$, coincida con la integral del lado izquierdo de 2.1.2. Lo útil de la igualdad anterior es que la integral del lado izquierdo facilita extender analíticamente el lado derecho por métodos empíricos:

Cuando se usó el Teorema de Convergencia Monótona, la serie $\sum e^{-nx}$ no convergía uniformemente en el dominio de integración $(0, \infty)$ porque la variable x se puede acercar arbitrariamente a $x = 0$ donde la serie diverge. Entonces si queremos que esto *no* suceda, tenemos que alejar el dominio de integración del 0 pero que de alguna manera se siga integrando de 0 a ∞. El plano complejo nos permite hacer justo eso.

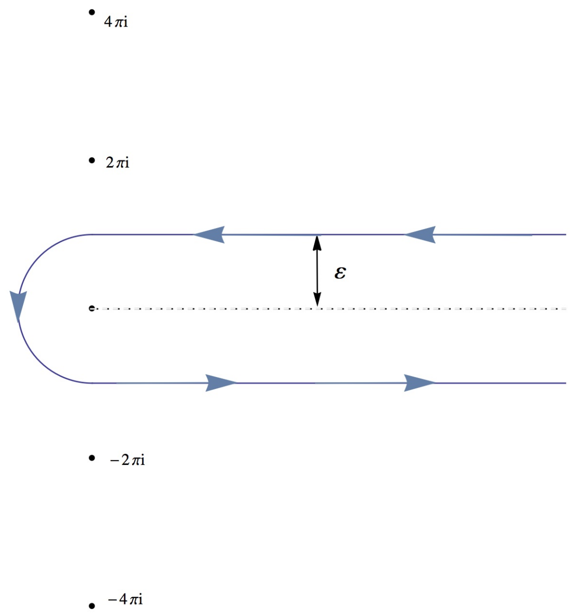
En lugar de integrar sobre el eje real positivo, integramos alrededor del eje real positivo rodeando al cero. Gracias a esta idea de pasar al plano complejo para reescribir la integral del lado izquierdo de 2.1.2, Riemann propone la integral [13, línea 13]

$$\int \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x} \tag{2.1.3}$$

donde el contorno se toma "from $+\infty$ to $+\infty$ taken in a positive sense around a domain which includes the value 0 but no other point of discontinuity of the integrand in its interior." [13, líneas 14-15]. Como Riemann no especifica su contorno, podemos usar el Teorema de Cauchy para definir cualquier contorno que queramos, con que siga cumpliendo lo que él pidió. Esta puede ser la razón por la cual no define explícitamente el contorno que usa.

Cuando Riemann menciona que el contorno rodea un dominio que incluye el cero pero ninguna otra singularidad del integrando de 2.1.3 tampoco define rigurosamente ese dominio pero, otra vez, el Teorema de Cuachy nos permite escoger el 'dominio' que queramos mientras cumpla lo que él quería. Entonces si tomamos el conjunto de complejos que distan del eje real positivo menos que una constante $\varepsilon > 0$ que sea menor que 2π, observamos que la frontera de ese conjunto forma un contorno que cumple la propiedad

Figura 2.1.1: Contorno de integración para extender $\zeta(s)$



que quiere Riemann porque sólo encierra al 0 y ninguna otra singularidad del integrando que son de la forma $\pm 2n\pi i$. A este conjunto lo denotamos por $D(\varepsilon)$ y se puede definir rigurosamente como

$$D(\varepsilon) := \bigcup_{x \geq 0} \{z \in \mathbb{C} \mid |z - x| < \varepsilon\}.$$

Gráficamente se puede ver un ejemplo concreto $D(\varepsilon)$ con $\varepsilon = \pi$ en la figura 2.1.1.

Es importante notar que *no* estamos integrando sobre el eje real positivo pues aquí la función multivaluada $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ es discontinua gracias al término $\log(-x)$. Para definir bien esta función y así definir el integrando de 2.1.3, tomamos el corte de ramificación como el eje real positivo junto con el cero. Con este corte, cuando x es un real negativo, $\log(-x)$ es real. Este corte es al que alude Riemann cuando dice "the logarithm of $-x$ is determined so as to be real when x is negative." [13, líneas 16-17]

Por último, cabe mencionar que la integral 2.1.3 *no* es la integral del lado izquierdo de 2.1.2, pero ésta última se puede obtener de la primera con un proceso de "implosión":

Como la integral alrededor de $D(\varepsilon)$ no depende de ε (mientras que éste cumpla $2\pi > \varepsilon > 0$), entonces si hacemos $\varepsilon \to 0$, por un lado, la integral se mantiene constante y por el otro lado, la integral tiende a algo similar a la integral de 2.1.2. En realidad este proceso no es sólo colapsar la frontera de $D(\varepsilon)$ al dominio original de integración $(0, \infty)$. Primero se "explota" el eje real no-negativo y se lleva a la frontera de $D(\varepsilon)$ y después este contorno se colapsa otra vez al eje real no-negativo. Este método le permitió a Riemann generalizar 2.1.2 a una integral que no tiene problemas de convergencia ni restricciones para s. Este proceso de implosión es el que se requiere y se hace simplemente con $D(\varepsilon) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ al tomar $\varepsilon \to 0^+$.

Este proceso de implosión no nos va a regresar la integral de 2.1.2 tal cual. Colapsar $D(\varepsilon)$ a $(0, \infty)$ es lo que hace aparecer el factor $\left(e^{-i\pi s} - e^{i\pi s}\right)$ en el resultado de Riemann [13, ecuación A.4]:

$$\int \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = \left(e^{-i\pi s} - e^{i\pi s}\right) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx. \tag{2.1.4}$$

Para evaluar el lado izquierdo de la igualdad anterior y confirmarla, separamos el contorno $\partial D(\varepsilon)$ en tres partes: dos rectas horizontales y un semicírculo de radio ε con centro en el origen (denotado por γ_ε):

$$\int_{\partial D(\varepsilon)} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = \int_{i\varepsilon+\infty}^{i\varepsilon} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx + \int_{-i\varepsilon}^{-i\varepsilon+\infty} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

La notación de la primera integral se refiere a empezar en $+\infty$ y bajar por la recta horizontal hasta el punto $i\varepsilon$. Similarmente, la tercera integral se toma sobre la recta horizontal que une $-i\varepsilon$ hasta $+\infty$. Ahora sabemos que

$$(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$$

donde $\log(-x)$ toma una infinidad de valores, entonces hay que escoger dos, uno para cada integral sobre las rectas horizontales, de tal manera que sea continua esa función porque las rectas horizontales están de lados opuestos del corte de ramificación y al rodear por γ_ε tenemos que tener cuidado con el valor de $\log(-x)$ al dar esta vuelta en sentido positivo alrededor del punto de ramificación.

Cuando estamos sobre el eje real positivo, los puntos son de la forma $x = y + i\varepsilon$ con $y, \varepsilon > 0$, entonces el argumento (donde tomamos la rama principal de $\arg(x)$) es cercano a 0 pero positivo. Entonces los puntos $-x$ tienen argumento cercano a $-\pi$ pero negativo, es decir no se pasan a estar cercanos de π. Entonces en la primera integral tomamos

$$\log(-x) = \log(x) - i\pi \qquad (x = y + i\varepsilon)$$

pues tomamos $\log(-1) = -i\pi$. Ahí se toma la rama principal del logaritmo que es la rama principal del argumento. De la misma manera, para la tercera integral (sobre la recta horizontal por debaje del eje real) tomamos

$$\log(-x) = \log(x) + i\pi \qquad (x = y - i\varepsilon)$$

pues si damos la vuelta al origen en sentido positivo el argumento de $-x$ cambia de $-\pi$ a π de manera continua.

Con estas definiciones calculamos

$$\begin{aligned}
\int_{i\varepsilon+\infty}^{i\varepsilon} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx &= \int_{i\varepsilon+\infty}^{i\varepsilon} \frac{e^{(s-1)\log(-x)}}{e^x - 1} dx = \int_{i\varepsilon+\infty}^{i\varepsilon} \frac{e^{-(s-1)i\pi} e^{(s-1)\log(x)}}{e^x - 1} dx \\
&= e^{(1-s)i\pi} \int_{i\varepsilon+\infty}^{i\varepsilon} \frac{e^{(s-1)\log(x)}}{e^x - 1} dx
\end{aligned}$$

donde $e^{i\pi} = -1$. Este cambio de signo lo usamos para cambiar el orden de integración y concluimos:

$$\int_{i\varepsilon+\infty}^{i\varepsilon} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx = e^{-si\pi} \int_{i\varepsilon}^{i\varepsilon+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

De manera análoga, la tercera integral sobre la recta horizontal inferior se reduce a:

$$\int_{-i\varepsilon}^{-i\varepsilon+\infty} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx = -e^{si\pi} \int_{-i\varepsilon}^{-i\varepsilon+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx,$$

Aquí no cambia el orden de integración pues queremos que coincida con la integral anterior y con 2.1.2.

Por último falta ver qué sucede con la integral sobre el semicírculo γ_ε. Sustituimos en esa integral la parametrización $x = \varepsilon e^{i\theta}$ donde $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$. Aquí $dx/x = id\theta$, entonces:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = i \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\left(-\varepsilon e^{i\theta}\right)^s}{e^x - 1} d\theta.$$

Evaluar esta integral no es necesario, sólo hay que ver su comportamiento cuando $\varepsilon \to 0$. Si escribimos

$$g(z) = \frac{z^s}{e^{-z} - 1}$$

entonces, como $|e^{-z} - 1| = \mathcal{O}(|z|)$ cuando $|z| \to 0$, entonces $|g(z)| = \mathcal{O}\left(|z|^{s-1}\right)$. Por lo tanto, cuando $\mathrm{Re}(s) > 1$, tenemos que $g(z) \to 0$ cuando $z \to 0$. Ahora, con esta notación llegamos a:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = i \int_{\pi/2}^{3\pi/2} g\left(-\varepsilon e^{i\theta}\right) d\theta = i\pi \left(\frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} g\left(-\varepsilon e^{i\theta}\right) d\theta \right),$$

es decir, la integral sobre γ_ε es igual a $i\pi$ veces el promedio de $g(z)$ para $z \in \gamma_\varepsilon$. Ahora, si $\mathrm{Re}(s) > 1$, cuando $\varepsilon \to 0^+$ el promedio de $g(z)$ se hace cero pues $g(z) \to 0$ cuando $z \to 0$ (en este caso $z = -\varepsilon e^{i\theta}$). Por lo tanto

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = 0.$$

Ya contamos con todas las herramientas para verificar 2.1.4. Tenemos que para $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{\partial D(\varepsilon)} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(e^{-si\pi} \int_{i\varepsilon}^{i\varepsilon + \infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} - e^{si\pi} \int_{-i\varepsilon}^{-i\varepsilon + \infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \right) \\
&= e^{-si\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx - e^{si\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto verificamos

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = \left(e^{-i\pi s} - e^{i\pi s}\right) \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

donde la notación del lado izquierdo se refiere a integrar sobre el contorno que definió Riemann. Por cuestiones de notación, escribimos $+\infty$ en lugar de sólo ∞, como lo hace Riemann [13, ecuación A.6], para hacer explícito que el contorno va de $+\infty$ a $+\infty$ rodeando el eje real positivo; hace alusión a que empieza y termina en el "infinito de los reales positivos."

Para simplificar esta expresión y poder sustuirla en 2.1.2, recordemos que el seno, como función de una variable compleja, se define como

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \Longrightarrow \qquad 2i \sin z = e^{iz} - e^{-iz},$$

por lo tanto si sustituimos $z = -\pi s$ tenemos:

$$e^{-i\pi s} - e^{i\pi s} = 2i \sin(-\pi s).$$

Como el seno es una función impar podemos reescribirlo como $-2i\sin(\pi s)$ y con esto tenemos:

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = -2i \sin(\pi s) \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

Ya podemos reescribir la integral en 2.1.2. Para el caso de $\mathrm{Re}(s) > 1$, sustituimos la igualdad anterior en 2.1.2 y obtenemos:

$$2 \sin(\pi s) \Pi(s-1) \zeta(s) = i \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} \tag{2.1.5}$$

donde pasamos el $-i$ al otro lado de la ecuación para coincidir con el resultado de Riemann [13, ecuación A.6].

Riemann se queda con 2.1.5 y simplemente menciona que ésta es la fórmula para $\zeta(s)$: "This equation now gives the value of the function $\zeta(s)$ for all complex numbers..." [13, línea 19]. Para verificar que efectivamente ya tenemos una extensión analítica de $\zeta(s)$, despejamos la ecuación 2.1.5.

Por el Teorema 3 de la sección 1.1, sabemos que

$$\frac{\pi s}{\Pi(s)\Pi(-s)} = \sin \pi s.$$

Por lo tanto, si sustituimos esta expresión para $\sin \pi s$ en la ecuación 2.1.5, obtenemos

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = \frac{\pi s}{\Pi(s)\Pi(-s)} 2i\Pi(s-1)\zeta(s),$$

pero la ecuación funcional de $\Pi(s)$ nos dice que $\Pi(s) = s\Pi(s-1)$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1}\frac{dx}{x} &= \frac{2\pi i s}{\Pi(s)\Pi(-s)}\Pi(s-1)\zeta(s) \\ &= \frac{2\pi i s}{\Pi(s)\Pi(-s)}\frac{\Pi(s)}{s}\zeta(s) \\ &= \frac{2\pi i}{\Pi(-s)}\zeta(s).\end{aligned}$$

Al despejar $\zeta(s)$ concluimos que para $\mathrm{Re}(s) > 1$ tenemos

$$\zeta(s) = \frac{\Pi(-s)}{2\pi i}\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{x} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1)\,. \tag{2.1.6}$$

Dedujimos esta igualdad usando $\mathrm{Re}(s) > 1$, pero el lado derecho de la igualdad está definida para toda $s \neq 1, 2, 3, \ldots$ donde el factor $\Pi(-s)$ tiene un polo, pero sabemos que para $s = 2, 3, \ldots$ la función $\zeta(s)$ coincide con la serie $\sum n^{-s}$ que es convergente, entonces la integral del lado derecho debe tener ceros en $s = 2, 3, \ldots$ que cancelan los polos de $\Pi(-s)$. Por lo tanto si definimos:

$$\zeta(s) := \frac{\Pi(-s)}{2\pi i}\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{x} \tag{2.1.7}$$

tendremos que para valores reales mayores que uno $\zeta(s)$ coincide con $\sum n^{-s}$. Riemann no menciona explícitamente la definición 2.1.7 como definición de $\zeta(s)$, pero la fórmula que propone en 2.1.5 define implícitamente a $\zeta(s)$.

Hemos manipulado algebráicamente la fórmula 2.1.5 para llegar a 2.1.7 que es una fórmula válida para toda s en el plano complejo porque la integral de 2.1.7 converge para toda $s \in \mathbb{C}$ pues el integrando se anula más rápido que cualquier función racional en x (así podemos acotar la cola de la integral por una función racional como x^{-2} cuya integral sí converge).

La integral que propone Riemann 2.1.7 (junto con el factor $1/2\pi i$), es una función de s y la denotamos por $I(s)$. Por lo tanto tenemos que $\zeta(s) = \Pi(-s)I(s)$. Para ver que $I(s)$ es una función entera usamos el Teorema de Weierstrass sobre la convergencia uniforme de funciones analíticas.[2]Definimos $I_n(s)$ como:

$$I_N(s) := \frac{1}{2\pi i}\int_{+N}^{+N} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{x}$$

es decir estamos integrando alrededor del eje real no-negativo del punto $N + i\varepsilon$ al punto $N - i\varepsilon$ en lugar de rodear *todo* el eje real no-negativo. Otra forma de pensarlo es que estamos intersectando $\partial D(\varepsilon)$ con el semiplano izquierdo $\mathrm{Re}(s) \leq N$. Vamos a demostrar que $\{I_N(s)\} \to I(s)$ uniformemente sobre cualquier compacto de $\mathbb{C}$ para concluir que $I(s)$ es una función entera (es claro por la construcción de $I_N(s)$ que converge puntualmente a $I(s)$).

Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ un compacto, entonces para cada $s \in K$ tenemos que hay una constante positiva M tal que $|s| < M$, entonces:

$$\begin{aligned}|I_N(s)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{+N}^{+N} \left|\frac{(-x)^s}{e^x - 1}\right| \cdot \frac{dx}{|x|} \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{+N}^{+N} \left|\frac{e^{M|\log(-x)|}}{e^x - 1}\right| \cdot \frac{dx}{|x|}\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

porque $|(-x)^s| = |e^{s\log(-x)}| \leq e^{|s||\log(-x)|}$ y porque $|s| < M$. Como la integral 2.1.8 ya no depende de s, entonces la denotamos por u_N.

Ahora observemos que:

$$\lim_{n\to\infty} u_N = \frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{+\infty} \left|\frac{e^{M|\log(-x)|}}{e^x - 1}\right| \cdot \frac{dx}{|x|} < \infty$$

[2]Si $f_n(z)$ es analítica en una región Ω_n y la sucesión $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente sobre todo subconjunto compacto de una región Ω, entonces $\lim f_n(z) := f(z)$ es analítica en Ω. [1]

porque el denominador del integrando crece más rápido que el factor $e^{M|\log(-x)|}$.[3] Por lo tanto tenemos que para $s \in K$:

$$\lim_{N\to\infty} |I_N(s)| \leq \lim_{N\to\infty} u_N < \infty$$

y así, $\{I_N(s)\}$ converge uniformemente a $I(s)$ sobre cualquier compacto K. Por último sólo falta ver que cada $I_N(s)$ es una función entera de s, pero con el Teorema de Morera es casi inmediato: sea σ una curva cerrada en $\mathbb{C}$, entonces:

$$\begin{aligned} \int_\sigma I_N(s)ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \int_{+N}^{+N} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{x} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{+N}^{+N} \frac{1}{x(e^x-1)} \left(\int_\sigma (-x)^s ds \right) dx \end{aligned}$$

donde el intercambio de las integrales se vale porque ambos dominios de integración son compactos y el integrando es una función continua de x y s. Por último, la integral sobre σ se anula porque $(-x)^s$ es una función entera para toda x en el otro dominio de integración. Entonces

$$\int_\sigma I_N(s)ds = 0 \quad \forall \sigma, N$$

y así cada $I_N(s)$ es entera. Con esto terminamos la prueba de que $I(s)$ es una función entera.

Por lo tanto $\zeta(s) = \Pi(-s)I(s)$ es una función analítica salvo en los posibles puntos problemáticos $s = 1, 2, 3, \ldots$, porque es aquí donde $\Pi(-s)$ tiene polos simples. Pero cuando s asume los valores $2, 3, \ldots$, sabemos que $\zeta(s)$ coincide con $\sum n^{-s}$ que sabemos que converge. Por lo tanto la integral $I(s)$ debe tener ceros en estos valores para cancelar los polos de $\Pi(-s)$. Entonces el único punto problemático es $s = 1$. Si nos acercamos al 1 mediante los reales mayores que 1 tenemos que:

$$\lim_{s\to 1^+} \zeta(s) = \lim_{s\to 1^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Entonces tenemos un polo simple en $s = 1$, pues el polo de $\Pi(-s)$ es simple. Por lo tanto tenemos la siguiente definición.

Definición. La función zeta de Riemann se define como

$$\zeta(s) = \frac{\Pi(-s)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{x}$$

y es una función meromorfa con un polo simple en $s = 1$.

Cabe mencionar que Riemann usa la notación $\zeta(s) := \sum n^{-s}$ desde el principio del artículo, es decir: "the function of a complex variable s which is *represented* by these two expressions, wherever they converge, I denote by $\zeta(s)$." (el énfasis no es el original) [13, líneas 7-8] Por lo tanto lo que significa la notación $\zeta(s)$ cambia cuando logra extender $\zeta(s) = \sum n^{-s}$ a $\zeta(s) = \Pi(-s)I(s)$ pues esta última fórmula sigue *representando* a $\sum n^{-s}$. La notación, antes de afirmar 2.1.5 en la línea 20, se refiere sólo a $\zeta(s) = \sum n^{-s}$ en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1$ pues antes de afirmar 2.1.5[4] , sólo se había establecido que en $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\zeta(s)$ estaba bien definida, pero cuando deduce 2.1.5, el significado de la notación $\zeta(s)$ cambia. Después de leer el artículo, en retrospectiva, es clara la razón por la cual siempre usa la notación $\zeta(s)$.

2.2. Los ceros triviales de $\zeta(s)$

Esta sección esta dedicada exclusivamente al último comentario que hace Riemann sobre la extensión analítica de $\zeta(s)$. Riemann dice que la ecuación 2.1.5 muestra que $\zeta(s)$ "...is zero if s is equal to a negative even integer." [13, líneas 20-21]. Este resultado no es inmediatamente obvio de la ecuación que menciona

[3]Para x muy cercano a $+\infty$, su argumento es muy pequeño, sea positivo o negativo, entonces $|\log(-x)| \approx \log|-x|$ y por lo tanto $e^{M|\log(-x)|} \approx |x|^M$.

[4]La ecuación A.6 en el artículo.

Riemann. Hoy ya es conocido que $\zeta(-2n) = 0$ por virtud de que los números de Bernoulli impares son cero, pero es más conocido este hecho por el factor $\sin(\pi s/2)$ que aparece en la ecuación funcional de $\zeta(s)$ (más sobre esto en la siguiente sección).

Los números de Bernoulli se definen como los coeficientes de la serie de potencias de la función

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

alrededor de $z = 0$. Sabemos que en $z = 0$, la función $f(z)$ es analítica porque

$$f(z) = \frac{1}{z^{-1}(e^z - 1)} = \frac{1}{z^{-1}\left(-1 + 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2!}z + \frac{1}{3!}z^2 + \cdots},$$

entonces cuando $z = 0$ tenemos que $f(0) = 1$. Así existe una expansión en serie de Taylor alrededor de $z = 0$ (en particular en el disco abierto de radio 2π porque es el disco más grande que no encierra a los polos más cercanos: $\pm 2\pi i$) de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Justo los factores $f^{(n)}(0) =: B_n$ se llaman los números de Bernoulli. Los primeros se pueden deducir computacionalmente:

$$\begin{array}{cc} B_0 = 1 & B_1 = -\frac{1}{2} \\ B_2 = \frac{1}{6} & B_3 = 0 \\ B_4 = -\frac{1}{30} & B_5 = 0 \\ B_6 = \frac{1}{42} & B_7 = 0. \end{array}$$

Podemos observar que los números de Bernoulli impares (que no sea B_1) siempre valen cero. Este hecho se demuestra con la identidad

$$\frac{-z}{e^{-z} - 1} = \frac{z}{e^z - 1} + z \quad \Longleftrightarrow \quad f(-z) - f(z) = z.$$

Por lo tanto si sustituimos la serie de potencias de $f(z)$ obtenemos la igualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(-1)^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = z$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}((-1)^n - 1) z^n = z.$$

Por lo tanto, tienen que coincidir los coeficientes de la serie del lado izquierdo con los de la "serie" del lado derecho que son puros ceros a partir del término $n = 1$. Es decir

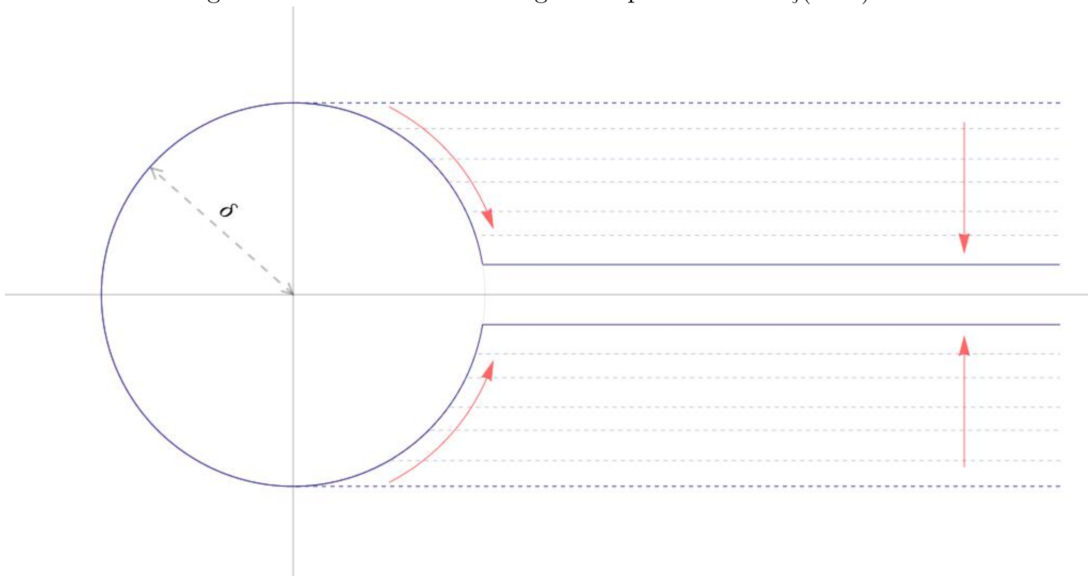
$$\frac{B_n}{n!}((-1)^n - 1) = 0$$

para toda $n > 1$. Observemos que cuando n es un impar mayor que 1, tenemos que $((-1)^n - 1) = -2 \neq 0$ y así es necesario que $B_n = 0$. Entonces hemos demostrado que $B_{2n+1} = 0$ para toda $n \geq 1$.

Todavía no hemos demostrado que $\zeta(-2n) = 0$ para $n \geq 1$ y la relación entre los números de Bernoulli y $\zeta(s)$ es todavía incompleta. La función $f(z)$ que acabamos de usar aparece en la integral $I(s)$ como $f(s)s^{-1}$ y es justo esta parte que complica la evaluación de la integral. Si no apareciera el término $(e^x - 1)^{-1}$ la integral sería más sencilla pero todavía hay problemas con el término $(-x)^{s-1}$ gracias a la multivaluación del logaritmo, pero este problema se puede evitar sencillamente si sólo tomamos valores enteros de s.

Si $s \in \mathbb{Z}$ podemos olvidarnos del logaritmo entonces $(-x)^{s-1} = (-1)^{s-1}x^{s-1}$. Esto, junto con la serie de potencias de la función $x(e^x - 1)^{-1}$, nos arroja una serie de integrales cada una con un integrando de la forma x^α con α un entero. Es muy probable que Riemann observó que al hacer s entero, era necesario expresar el factor $(e^x - 1)^{-1}$ (o más bien el factor $x(e^x - 1)^{-1}$) en su serie de potencias para obtener integrales fáciles de evaluar.

Figura 2.2.1: Contorno de integración para calcular $\zeta(-2n) = 0$



Cabe mencionar una cosa más: como s ahora es entero, *no* necesitamos usar el logaritmo para definir $(-x)^{s-1}$ y así podemos olvidarnos del corte de ramificación que habíamos hecho (el eje real no-negativo). Usaremos la definición de $\zeta(s)$ que enunciamos para simplificar los cálculos.

La serie para $z(e^z - 1)$ la podemos sustituir en la definición de $\zeta(s)$ cuando $s = n$ es un entero. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\zeta(n) &= \frac{\Pi(-n)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{x} \\
&= \frac{\Pi(-n)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} \frac{(-x)^n}{x} \cdot \frac{dx}{x} \\
&= \frac{\Pi(-n)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} x^m \frac{(-x)^n}{x} \cdot \frac{dx}{x}.
\end{aligned}$$

Ahora, lo ideal sería poder intercambiar la serie con la integral pero esto no se puede ya que la serie de potencias de $x\,(e^x - 1)^{-1}$ es uniformemente convergente sólo en el disco $|z| < 2\pi$ y es claro que el contorno de integración se sale de este disco. Entonces lo que hay que hacer es modificar el contorno para poder intercambiar la serie con la integral.

El contorno original $\partial D(\varepsilon)$ está conformado por dos rectas horizontales y un semicírculo (véase la figura 2.1.1), entonces lo que hay que hacer es cerrar el semicírculo (este proceso esta ilustrado en la figura 2.2.1). Es decir, si fijamos el radio del semicírculo en un real positivo $\delta < 2\pi$ y cerramos el semicírculo, obtendremos un círculo de radio δ y dos rectas horizontales sobrepuestas.

Las integrales sobre estas dos rectas horizontales se cancelan porque estan orientadas de manera contraria. En otras palabras:

$$\int_{+\infty}^{\delta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} x^m \frac{(-x)^n}{x} \cdot \frac{dx}{x} = -\int_{\delta}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} x^m \frac{(-x)^n}{x} \cdot \frac{dx}{x}$$

para toda $\delta > 0$. Es importante recordar que el factor $(-x)^n$ ya no cambia de valor según como nos acercamos al corte de ramificación porque ya no es una función multivaluada. Esto nos permite cancelar sin problemas las integrales sobre las rectas horizontales.

También es importante notar que llevar el contorno original $\partial D(\varepsilon)$ al círculo y dos rectas sobrepuestas es una deformación contínua porque el contorno nunca cruza un punto singular del integrando. Por lo tanto el Teorema de Cauchy nos garantiza que la integral no va a cambiar de valor.

La última y única parte del contorno que queda es el semicírculo de radio δ que termina por cerrarse. Por lo tanto, la integral a lo largo de $\partial D(\varepsilon)$ se reduce a integrar sobre el círculo $|x| = \delta$:

$$\begin{aligned}\zeta(n) &= \frac{\Pi(-n)}{2\pi i} \int_{|x|=\delta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} x^m \frac{(-x)^n}{x} \cdot \frac{dx}{x} \\ &= \Pi(-n)\,(-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=\delta} x^{m+n-1} \frac{dx}{x}.\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

El intercambio de la intergal con la suma se puede hacer, pues la serie de potencias de $x\,(e^x - 1)^{-1}$ converge uniformemente sobre el círculo $|x| = \delta$ porque éste es un conjunto compacto metido en el disco de convergencia de aquella serie.

Ahora evaluamos la integral con el cambio de variable $x = \delta e^{i\theta}$ y $dx = \delta i e^{i\theta} d\theta$, es decir $\frac{dx}{x} = i d\theta$. Por lo tanto, si hacemos $\delta = 1$ simplificamos la integral y obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=\delta} x^{m+n-1} \frac{dx}{x} =& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(m+n-1)i\theta} d\theta \\ =& \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{(m-n-1)\,i} e^{(m+n-1)i\theta} \right]_0^{2\pi}\end{aligned}$$

cuando $m \neq 1 - n$. Como la función $e^{(m+n-1)i\theta}$ es 2π-periódica la integral vale cero. Entonces la única integral que tiene valor distinto de cero es cuando $m = 1 - n$, pero como $m \geq 0$ es un entero no negativo, es necesario que $n < 1$ (y no $n \leq 1$ ya que $n \neq 1$ para que tenga sentido la expresión $\zeta(n)$). Esta parte es clave.

Cuando $m = 1 - n$, la integral vale

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 1$$

y así todos los sumandos de la serie (de la ecuación 2.2.1), salvo el sumando con índice $m = 1 - n$, se anulan y sólo queda uno:

$$\zeta(n) = \Pi(-n)\,(-1)^n \frac{B_{1-n}}{(1-n)!}.$$

Para reescribir esta identidad de una manera más sencilla, escribimos $n = -k$ donde $k \geq 0$ es un entero no-negativo. Entonces el factor $\Pi(-n) = \Pi(k)$ se reduce a $k!$ que se cancela con casi todos los factores de $(1-n)! = (k+1)!$. Con esto concluimos que

$$\zeta(-k) = (-1)^k \frac{B_{k+1}}{k+1} \quad \forall k \geq 0. \tag{2.2.2}$$

La ecuación anterior nos dice claramente cuando $\zeta(-k) = 0$ porque B_{k+1} se anula cuando k es un entero par (distinto de cero). Un valor interesante es cuando $k = 0$ donde claramente $\zeta(0) = B_1 = -\frac{1}{2}$.

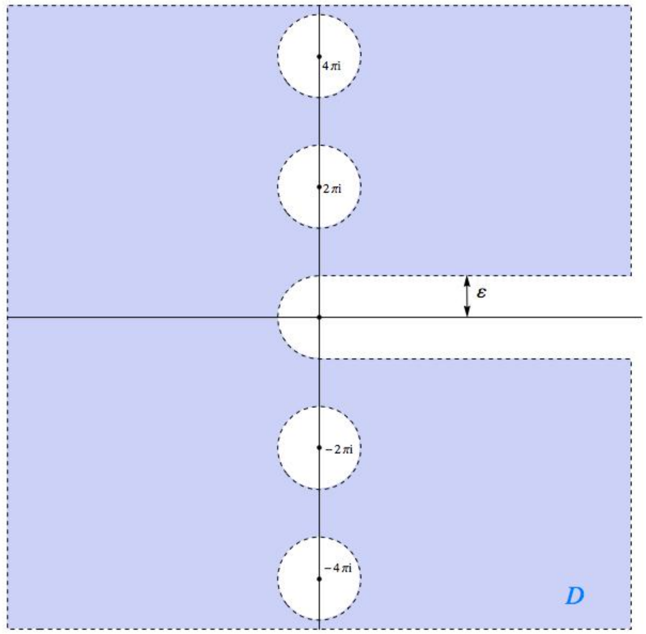
Riemann no expone la relación 2.2.2 pero la seguridad con la que afirma que $\zeta(-2k) = 0$ garantiza que conocía esta relación. Estos ceros que se deducen de manera sencilla se llaman los *ceros triviales* de la función zeta de Riemann.

2.3. La ecuación funcional de $\zeta(s)$

El propósito de las próximas diez líneas, de la 22 a la 31 del artículo de Riemann, es encontrar una fórmula que relacione $\zeta(s)$ con $\zeta(1-s)$ como la fórmula de reflexión de Euler para la función gamma. De hecho, no es sorprendente que exista tal fórmula que relacione $\zeta(s)$ con $\zeta(1-s)$, porque, cuando extiende $\zeta(s)$ a todo el plano, Riemann empieza literalmente con la fórmula integral de $\Gamma(s) = \Pi(s-1)$; le hace un cambio de variable para obtener un término n^{-s}; suma sobre todos los naturales y obtiene una fórmula que es casi idéntica a la fórmula de la extensión de $\zeta(s)$. Esto hace muy probable que $\zeta(s)$ herede propiedades parecidas a la función factorial.

Por esto, Riemann empieza con los complejos $\mathrm{Re}(s) < 0$ que son los que cumplen que $\mathrm{Re}(1-s) > 1$, justo el caso anterior. Con la hipótesis de que $\mathrm{Re}(s) < 0$, Riemann afirma que la integral que propuso

Figura 2.3.1: Contorno de integración para deducir la ecuación funcional de $\zeta(s)$



para extender $\zeta(s)$ analíticamente se puede evaluar considerando el contorno desde otra perspectiva: en lugar de rodear al eje real positivo (o equivalentemente el conjunto $D(\varepsilon)$ para $0 < \varepsilon < 2\pi$), lo ve como si estuviera rodeando el complemento de manera negativa [13, líneas 22-24]. Gráficamente se puede ver en la figura 2.3.1. Cuando dice Riemann que se integre alrededor del complemento de D en el sentido negativo, él en realidad esta evaluando la misma integral

$$\int_{\partial D(\varepsilon)} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx = \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

sobre el mismo contorno, sólo estamos cambiando la perspectiva.

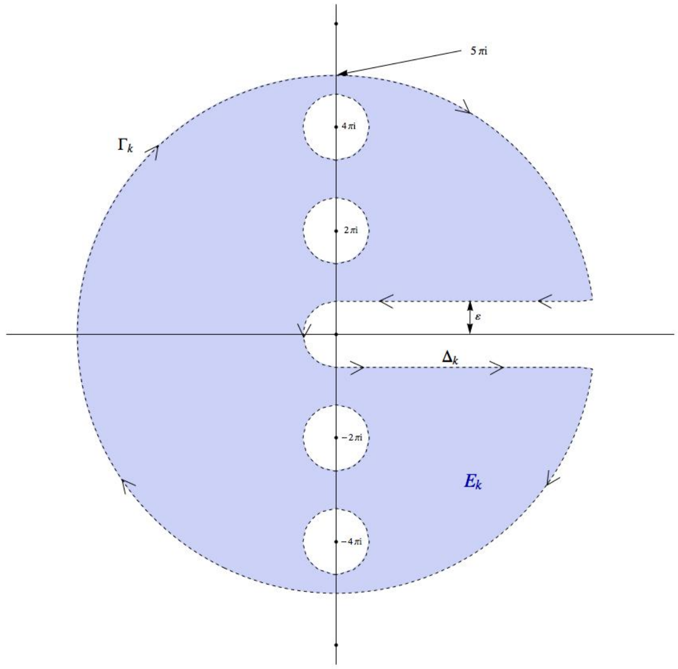
Olvidemos por un momento que el Teorema del Residuo es válido sólo para curvas compactas; consideremos la siguiente argumentación. Al recorrer $\partial D(\varepsilon)$, estamos rodeando el complemento de $D(\varepsilon)$ de manera negativa porque $\partial D(\varepsilon) = \partial D(\varepsilon)^c$. Entonces el Teorema del Residuo nos dice que la integral se evalúa como una suma de residuos que son integrales sobre círculos (*en sentido negativo*) que encierran las singularidades que están en el complemento de $D(\varepsilon)$. Es decir, la integral sobre $\partial D(\varepsilon)$ se puede descomponer como una suma de integrales sobre círculos (en sentido negativo) de radio ε alrededor de los otros puntos singulares $\pm 2n\pi i$ que tiene el integrando. Es decir:

$$\int_{\partial D(\varepsilon)} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx = -\sum_{n \neq 0} \int_{|z-2n\pi i|=\varepsilon} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

Es importante notar que, al agregar el signo menos, ya estamos orientando los círculos $|z - 2n\pi i| = \varepsilon$ de manera positiva; ésta es la convención.

Para poder aplicar formalmente el Teorema del Residuo, necesitamos un caso donde las curvas son compactas y de alguna manera llevar ese caso a lo que queremos. Lo que hacemos es intersectar el complemento de $D(\varepsilon)$ con el disco $|z| \leq (2k+1)\pi$. Para una $k \in \mathbb{N}$, denotamos por E_k como esa intersección. La figura 2.3.2 es un ejemplo para $k = 2$. La frontera de E_k es una curva compacta a la que le podemos aplicar el Teorema del Residuo, pero antes que eso es importante notar que ∂E_k se divide en dos arcos principales: el círculo de radio $(2k+1)\pi$ salvo los puntos en $D(\varepsilon)$, que denotaremos por Γ_k orientado negativamente, y la frontera de $D(\varepsilon)$ intersección el disco $|z| \leq (2k+1)\pi$ que denotaremos por Δ_k. Entonces $E_k = \Gamma_k + \Delta_k$, y cuando $k \to \infty$ es claro que $\Delta_k \to \partial D(\varepsilon)$.

Figura 2.3.2: Contorno de integración para probar formalmente la ecuación funcional de $\zeta(s)$



El Teorema del Residuo enuncia que

$$\begin{aligned} \int_{E_k} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx &= -\sum_{\substack{n=-k \\ n\neq 0}}^{k} \int_{|x-2n\pi i|=\varepsilon} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1} dx \\ \int_{\Gamma_k} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx + \int_{\Delta_k} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx &= -\sum_{n=1}^{k} \int_{|x\pm 2n\pi i|=\varepsilon} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1} dx \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

pues los puntos singulares encerrados por E_k son los $2n\pi i$ con $-k \leq n \leq k$. La idea ahora es hacer $k \to \infty$.

Queremos que la integral sobre Γ_k se haga cero para poder obtener solamente la integral sobre $\partial D(\varepsilon)$ que es la que, junto con el factor $\Pi(-s)/2\pi i$, define $\zeta(s)$. Entonces queremos hacer

$$\left| \int_{\Gamma_k} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx \right| \leq \int_{\Gamma_k} \frac{\left|(-x)^{s-1}\right|}{|e^x - 1|} dx \quad \to \quad 0$$

pero, para poder ver esto necesitamos poder acotar el término $\left|(-x)^{s-1}\right|$. Observemos que, como $x \in \Gamma_k$, entonces $|x| = (2k+1)\,\pi$ porque Γ_k está contenido en un círculo de radio $(2k+1)\,\pi$; el módulo de x es una función de k.

Si aplicamos la desigualdad del triángulo a la serie de potencias de $|e^z|$ llegaremos a que $|e^z| \leq e^{|z|}$, entonces tenemos que

$$\left|(-x)^{s-1}\right| = \left|e^{(s-1)\log(-x)}\right| \leq e^{|s-1||\log(-x)|}.$$

Ahora, como x corre sobre Γ_k, su argumento está acotado porque x no rodea el cero. Entonces $|\log(-x)|$ es del mismo orden que su parte real $\log|-x|$ cuando $k \to \infty$. Por lo tanto, para las k's suficientemente grandes, existe una constante $P > 0$ tal que $|\log(-x)| \leq P \log|x| = P \log\left((2k+1)\,\pi\right)$. Con esto terminamos de acotar el término $|(-x)|^{s-1}$:

$$\left|(-x)^{s-1}\right| \leq e^{|s-1|P\log|x|} \leq |x|^{P|s-1|} = (2k+1)^{P|s-1|}\,\pi^{P|s-1|}.$$

Si sustituimos esto en la integral sobre Γ_k, obtenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_k}\frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1}dx\right| &\leq \int_{\Gamma_k}\frac{(2k+1)^{P|s-1|}\pi^{P|s-1|}}{|e^x-1|}dx\\ &\leq (2k+1)^{P|s-1|}\pi^{P|s-1|}\int_{\Gamma_k}\frac{dx}{|e^x-1|}.\end{aligned}$$

Como la función $|e^x-1|^{-1}$ es continua sobre el conjunto compacto Γ_k para cada k, entonces alcanza su máximo en algún punto de Γ_k y como esos puntos son de la forma $(2k+1)\pi e^{i\theta}$, entonces existe un $\theta_k \in (0,2\pi)$ tal que

$$\frac{1}{|e^x-1|}\leq\frac{1}{\left|e^{(2k+1)Q}-1\right|},$$

donde $Q=Q(k)=\pi e^{i\theta_k}$ es de orden constante cuando $k\to\infty$.

Con esto podemos concluir que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_k}\frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1}dx\right| &\leq \frac{(2k+1)^{P|s-1|}\pi^{P|s-1|}}{\left|e^{(2k+1)Q}-1\right|}\int_{\Gamma_k}dx\\ &\leq \frac{(2k+1)^{P|s-1|}\pi^{P|s-1|}}{\left|e^{(2k+1)Q}-1\right|}2\pi^2(2k+1)\\ &\leq 2\pi\frac{(2k+1)^{P|s-1|+1}\pi^{P|s-1|+1}}{\left|e^{(2k+1)Q}-1\right|}.\end{aligned}$$

donde la longitud de Γ_k es menor que la longitud completa del círculo de radio $(2k+1)\pi$ que es $2\pi^2(2k+1)$.

Ahora, si hacemos $k\to\infty$ es claro que el denominador del lado derecho crece más rápido que el numerador para s fija, entonces el lado derecho se hace cero lo cual implica que

$$\lim_{k\to\infty}\left|\int_{\Gamma_k}\frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1}dx\right|=0.$$

Este hecho es a lo que se refiere Riemann cuando justifica el cambio de perspectiva al decir "...the integral taken th[r]ough values of infinitely large modulus is then infinitely small." [13, línea 24].

Con esto podemos tomar la igualdad 2.3.1 y hacer el límite cuando $k\to\infty$ de ambos lados. Recordemos que $\Delta_k\to\partial D(\varepsilon)$ cuando $k\to\infty$. Entonces obtenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_{\Delta_k}\frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1}dx &= -\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_{|x\pm 2n\pi i|=\varepsilon}\frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1}dx\\ \int_{\partial D(\varepsilon)}\frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1}dx &= -\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|x\pm 2n\pi i|=\varepsilon}\frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1}dx.\end{aligned}$$

Como la integral sobre $\partial D(\varepsilon)$ es simplemente el contorno original de Riemann, tenemos que

$$\int_{+\infty}^{+\infty}\frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1}dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|x\pm 2n\pi i|=\varepsilon}\frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1}dx. \tag{2.3.2}$$

Las integrales sobre los círculos se pueden calcular explícitamente. Un complejo sobre $|x\pm 2n\pi i|=\varepsilon$ es de la forma $x=\pm 2n\pi i+y$ donde $|y|=\varepsilon$. Entonces la integral queda como

$$\begin{aligned}\int_{|x\pm 2n\pi i|=\varepsilon}\frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1}dx &= \int_{|y|=\varepsilon}\frac{(\mp 2n\pi i-y)^{s-1}}{e^{\pm 2n\pi i+y}-1}dy\\ &= \int_{|y|=\varepsilon}(\mp 2n\pi i-y)^{s-1}\frac{y}{e^y-1}\frac{dy}{y},\end{aligned}$$

donde $e^{\pm 2n\pi i}=1$. Si definimos

$$g\left(y\right)=\left(\mp 2n\pi i-y\right)^{s-1}\frac{y}{e^{y}-1},$$

podemos concluir inmediatamente que $y=0$ es un punto singular removible de $g(y)$ porque

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^{y}-1}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{y}\left(y+\frac{y^{2}}{2!}+\frac{y^{3}}{3!}+\cdots\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{1+\frac{y^{1}}{2!}+\frac{y^{2}}{3!}+\cdots}=1$$

Esto quiere decir que existe una función analítica $\hat{g}\left(y\right)$ que extiende a g en el punto $y=0$, entonces

$$\int_{|x\pm 2n\pi i|=\varepsilon}\frac{(-x)^{s-1}}{e^{z}-1}dx=\int_{|y|=\varepsilon}\frac{\hat{g}\left(y\right)}{y}dy.$$

El lado derecho es la integral que aparece en la fórmula integral de Cauchy para calcular $\hat{g}\left(0\right)$. La fórmula integral de Cauchy nos dice que

$$\hat{g}\left(0\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|y|=\varepsilon}\frac{\hat{g}(z)}{z}dz,$$

porque el índice del círculo $|y|=\varepsilon$ es uno. Por otro lado sabemos que

$$\hat{g}\left(0\right)=\lim_{y\to 0}g\left(y\right)=\lim_{y\to 0}\left(\mp 2n\pi i-y\right)^{s-1}\frac{y}{e^{y}-1}=\lim_{y\to 0}\left(\mp 2n\pi i-y\right)^{s-1}.$$

Por lo tanto $\hat{g}\left(0\right)=\left(\mp 2n\pi i\right)^{s-1}$ y así

$$\begin{aligned}\int_{|y|=\varepsilon}\frac{\hat{g}(z)}{z}dz &= 2\pi i\hat{g}\left(0\right)\\ &= 2\pi i\left(\mp 2n\pi i\right)^{s-1}.\end{aligned}$$

Con esto ya conocemos el valor de las integrales que rodean los puntos singulares de la forma $s=\pm 2n\pi i$:

$$\int_{|x\pm 2n\pi i|=\varepsilon}\frac{(-x)^{s-1}}{e^{z}-1}dx=2\pi i\left(\mp 2n\pi i\right)^{s-1}.$$

Sustituimos esta integral en 2.3.2 y obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{+\infty}^{+\infty}\frac{(-x)^{s-1}}{e^{x}-1}dx &= -2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mp 2n\pi i\right)^{s-1}\\ &= -2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(2n\pi i\right)^{s-1}+\left(-2n\pi i\right)^{s-1}\right]\\ &= -2\pi i\left(2\pi\right)^{s-1}\left[i^{s-1}+\left(-i\right)^{s-1}\right]\sum_{n=1}^{\infty}n^{s-1}. \qquad (2.3.3)\end{aligned}$$

La serie que aparece del lado derecho converge sólo cuando $\mathrm{Re}(1-s)>1$ i.e. cuando $\mathrm{Re}(s)<0$ que es el caso que está considerando Riemann. Es justo por esta razón por la cual *no* se puede integrar alrededor del complemento de $D(\varepsilon)$ cuando $\mathrm{Re}(s)>1$, por esto no usamos el Teorema del Residuo antes.

Para el caso $\mathrm{Re}(1-s)>1$ podemos concluir que $\sum n^{s-1}=\zeta(1-s)$. Si sustituimos la integral del lado izquierdo por su valor en la ecuación 2.1.5, tenemos

$$\begin{aligned}-2i\sin\left(\pi s\right)\Pi(s-1)\zeta(s) &= -i\left(2\pi\right)^{s}\left[i^{s-1}+\left(-i\right)^{s-1}\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-s}}\\ 2\sin\left(\pi s\right)\Pi(s-1)\zeta(s) &= \left(2\pi\right)^{s}\left[i^{s-1}+\left(-i\right)^{s-1}\right]\zeta(1-s). \qquad (2.3.4)\end{aligned}$$

Esta es la expresión que deduce Riemann [13, ecuación A.7] y exhibe una relación entre $\zeta(s)$ y $\zeta(1-s)$.

Si quisiéramos despejar $\zeta(s)$ (algo que no hace Riemann), multiplicamos ambos lados de 2.3.3 por $\Pi(-s)/2\pi i$. El lado derecho coincide con la definición formal que dimos de $\zeta(s)$ y así tenemos que

$$\zeta(s) = -\Pi(-s)\,(2\pi)^{s-1}\left[i^{s-1} + (-i)^{s-1}\right]\zeta(1-s).$$

También podemos simplificar la suma de potencias de i con la función $\sin s$ porque

$$i^{s-1} + (-i)^{s-1} = \frac{1}{i}e^{s\log i} + \frac{1}{-i}e^{s\log(-i)} = 2\frac{1}{2i}\left(e^{s\pi i/2} - e^{-s\pi i/2}\right)$$

y la definición del seno es:

$$i^{s-1} + (-i)^{s-1} = 2\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right).$$

Por lo tanto nuestra formulación de la ecuación funcional de $\zeta(s)$ se puede reescribir como:

$$\zeta(s) = 2\Pi(-s)\,(2\pi)^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s). \tag{2.3.5}$$

Si usamos la función gamma, en lugar de la función factorial, con $\Gamma(1-s) = \Pi(-s)$, tendremos la formulación moderna de la ecuación funcional de $\zeta(s)$.

A pesar de que usamos la restricción de que $s < 0$ para deducir la ecuación funcional, la ecuación es válida para toda s pues ambos lados son funciones analíticas salvo en $s = 0, 1, 2, \ldots$, donde al menos un factor tiene un polo. Por lo tanto la ecuación funcional es válida para todo $s \in \mathbb{C} - \mathbb{N}$.

Una vez acabada la demostración de la ecuación funcional, Riemann la reescribe para hacer clara la simetría que empieza a aludirse al establecer la relación entre $\zeta(s)$ y $\zeta(1-s)$ [13, líneas 29-31 y ecuación A.8]. Sin pérdida de generalidad, usaremos la formulación moderna de la ecuación funcional 2.3.5 porque el proceso de reescribir tal ecuación es más sencillo.

Cuando Riemann se refiere a "...the known properties of the function Π," [13, línea 29] está usando la fórmula de reflexión de Euler para el factor $\sin(\pi s/2)$ y la relación de Legendre para el factor $\Pi(-s)$. Si combinamos estas dos propiedades de $\Pi(s)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= 2\Pi(-s)\,(2\pi)^{s-1}\sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\zeta(1-s)\\
&= 2\left(2^{-s}\Pi\left(\frac{-s}{2}\right)\Pi\left(\frac{-s-1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)(2\pi)^{s-1}\left(\frac{\pi\frac{s}{2}}{\Pi\left(\frac{s}{2}\right)\Pi\left(\frac{-s}{2}\right)}\right)\zeta(1-s)\\
&= \sqrt{\pi}\pi^{s-1}\frac{s}{2}\left(\frac{\Pi\left(\frac{-s}{2}\right)\Pi\left(\frac{-s-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{s}{2}\right)\Pi\left(\frac{-s}{2}\right)}\right)\zeta(1-s)\\
&= \pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{s}{2}\frac{\Pi\left(-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}-1\right)}{\Pi\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s).
\end{aligned}$$

Gracias a la ecuación funcional de $\Pi(s)$ sabemos que $\Pi\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{s}{2}\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)$ y así

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{s}{2}\frac{\Pi\left(\frac{1-s}{2}-1\right)}{\frac{s}{2}\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)}\zeta(1-s)\\
\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\zeta(s) &= \pi^{s-\frac{1}{2}}\Pi\left(\frac{1-s}{2}-1\right)\zeta(1-s).
\end{aligned}$$

Ahora, como $s - \frac{1}{2} = \frac{s}{2} - \frac{1-s}{2}$, entonces el exponente de π lo podemos separar en estos dos sumandos. Pasamos uno de esos factores al otro lado y obtenemos

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \Pi\left(\frac{1-s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s). \tag{2.3.6}$$

Riemann expone esta igualdad cuando dice que el lado izquierdo (la expresión A.8 en el artículo de Riemann) queda invariante bajo el cambio de variable $s \to 1-s$ [13, línea 31 y ecuación A.8].

Riemann dice que esta “invarianza”2.3.6 lo motiva a considerar $\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)$ en vez de $\Pi(s)$ al extender por primera vez la función $\sum n^{-s}$ [13, líneas 32-33].

No es difícil convencerse de que Riemann considera $\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)$, para poder obtener, al deducir $\zeta(s)$ de la fórmula integral de $\Pi(s)$, algo muy similar al lado derecho de 2.3.6 en la *nueva* fórmula de la extensión analítica de $\zeta(s)$. Esto le permitiría deducir la ecuación funcional de $\zeta(s)$ inmediatamente de aquella fórmula nueva.

De hecho, la función de s definida por el lado derecho de 2.3.6 es invariante bajo el cambio $s \to 1-s$ mientras que $\zeta(s)$ cumple una relación indirecta al hacer ese cambio de variable, entonces es más cómodo trabajar con el lado derecho de 2.3.6 como la función principal del artículo en lugar de trabajar con $\zeta(s)$. Es muy probable que esta sea la razón por la cual Riemann quiso reconstruir la fórmula para $\zeta(s)$ de tal manera que apareciera el lado derecho de 2.3.6.

Riemann vuelve a extender $\zeta(s)$ usando $\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)$ en lugar de $\Pi(s-1)$ con el mismo método que usa al principio del artículo y dice que se obtiene una expresión muy conveniente para $\zeta(s)$ [13, líneas 33-34]. Ahora la primera vez que se consideró la fórmula integral de $\Pi(s-1)$, se hizo el cambio de variable $y = nx$ con $dy = ndx$. Esto nos daba

$$\Pi(s-1) = \int_0^\infty e^{-nx}(nx)^{s-1}\, ndx = n^s \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx.$$

Es justo el coeficiente de la última integral que se despeja para obtener el término n^{-s} y así poder sumar sobre todos los enteros positivos y obtener $\sum n^{-s}$. Lo que hace el cambio $s = \frac{s}{2}-1$ es obligar que la n esté al cuadrado para poder salir de la integral como n^s.

En el resultado que obtiene Riemann [13, ecuación A.9], es claro, por el exponente de la e, que usó el cambio de variable $y = n^2\pi x$. El factor π es un poco misterioso pero hay una razón muy sencilla por lo cual aparece. Si consideramos el cambio de variable *sin* la “π”, las exponenciales que surgen son de la forma $e^{-n^2 x}$ y éstas van a ser los sumandos de la serie que se formará al sumar sobre $n \in \mathbb{N}$. Esa serie es similar a la función $\Psi(x)$ que se estudió en la sección 1.6 pero sin el factor π en los exponentes de cada sumando. Como el factor π simplifica bastante las propiedades de $\Psi(x)$, es muy conveniente hacer el cambio $y = n^2\pi x$ para poder usar las propiedades de la función $\Psi(x)$.

Entonces hacemos el cambio de variable $y = n^2\pi x$ en la fórmula integral de $\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right) &= \int_0^\infty e^{-y} y^{\frac{s}{2}-1} dy = \int_0^\infty e^{-n^2\pi x}\left(n^2\pi x\right)^{\frac{s}{2}-1} n^2\pi dx \\
&= \int_0^\infty e^{-n^2\pi x}\left(n^2\right)^{\frac{s}{2}-1}\pi^{\frac{s}{2}-1} x^{\frac{s}{2}} n^2\pi \frac{dx}{x} \\
&= \pi^{\frac{s}{2}} n^s n^{-2} n^2 \int_0^\infty e^{-n^2\pi x} x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} \\
\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\frac{1}{n^s} &= \int_0^\infty e^{-n^2\pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx,
\end{aligned}$$

que es lo que obtiene Riemann en la ecuación A.9. Ahora sumamos sobre $n \in \mathbb{N}$ ambos lados de la ecuación. Podemos usar el Teorema de convergencia monótona de exactamente la misma manera que cuando justificamos el intercambio de serie e integral al principio del artículo de Riemann. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty \Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\frac{1}{n^s} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-n^2\pi x} x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} \\
\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x} x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x}.
\end{aligned}$$

Recordemos la definición de $\Psi(x) = \sum e^{-n^2\pi x}$ y tomemos $\mathrm{Re}(s) > 1$, con esto Riemann concluye [13, ecuación A.11]:

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_0^\infty \Psi(x) x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} \qquad (s > 1)\,. \tag{2.3.7}$$

En las siguientes dos ecuaciones de su artículo (A.13 yA.14), Riemann da otra demostración de la ecuación funcional de $\zeta(s)$ basándose en la ecuación funcional de $\Psi(x)$ que demostramos en la sección 1.6:

$$\frac{1+2\Psi(x)}{1+2\Psi\left(x^{-1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}}. \tag{2.3.8}$$

Enunciado de manera despejada, éste es el único resultado matemático que Riemann cita explícitamente [13, ecuación A.12]. Al final del artículo [13, líneas 119-120], también hace otra cita pero ésta es de un trabajo de Gauss y Goldschmidt que compara computacionalmente la integral logarítmica $\mathrm{Li}(x)$ y la función contadora de primos $\pi(x)$; éste no es un resultado matemático *per se*.

Para poder usar 2.3.8, se necesita que aparezca un término $\Psi\left(x^{-1}\right)$ en la ecuación 2.3.7. Una forma de lograr esto es hacer el cambio de variable $x \leftrightarrow x^{-1}$, pero sólo se intercambia el término $\Psi(x)$ con $\Psi\left(x^{-1}\right)$; necesitamos ambos términos para usar la ecuación funcional de $\Psi(x)$. Esto se soluciona separando el dominio de integración en los intervalos $(0,1)$ y $(1,\infty)$. Si hacemos el cambio de variable $x \leftrightarrow x^{-1}$ en el intervalo $(0,1)$, obtendremos un término $\Psi\left(x^{-1}\right)$ en una integral de $(1,\infty)$ que coincide con el otro dominio original de integración con su término $\Psi(x)$.

Al hacer este truco, Riemann después sólo usa la ecuación funcional de $\Psi(x)$ y unas manipulaciones algebráicas para demostrar por segunda vez la ecuación funcional de $\zeta(s)$. Aquí mostramos todos los pasos de la demostración. Primero separamos las integrales como se había explicado antes:

$$\int_0^\infty \Psi(x)x^{\frac{s}{2}}\frac{dx}{x} = \int_1^\infty \Psi(x)x^{\frac{s}{2}}\frac{dx}{x} + \int_0^1 \Psi(x)x^{\frac{s}{2}}\frac{dx}{x}.$$

Después hacemos el cambio de variable $x = y^{-1}$ con $x^{-1}dx = -y^{-1}dy$ en la segunda integral y obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Psi(x)x^{\frac{s}{2}}\cdot\frac{dx}{x} &= \int_1^\infty \Psi(x)x^{\frac{s}{2}}\frac{dx}{x} - \int_{0^{-1}}^{1^{-1}} \Psi\left(\frac{1}{y}\right)y^{-\frac{s}{2}}\frac{dy}{y}\\ &= \int_1^\infty \Psi(x)x^{\frac{s}{2}}\frac{dx}{x} + \int_1^\infty \Psi\left(\frac{1}{y}\right)y^{-\frac{s}{2}}\frac{dy}{y}.\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Aquí sustituimos la ecuación funcional en su forma despejada:

$$\Psi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt{x}}{2}\left(1+2\Psi(x)\right) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x}\Psi(x) - \frac{1}{2}$$

en la integral 2.3.9 para obtener:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Psi(x)x^{\frac{s}{2}}\cdot\frac{dx}{x} &= \int_1^\infty \Psi(x)x^{\frac{s}{2}}\frac{dx}{x} + \int_1^\infty \left(\frac{\sqrt{y}}{2} + \sqrt{y}\Psi(y) - \frac{1}{2}\right)y^{-\frac{s}{2}}\frac{dy}{y}\\ &= \int_1^\infty \Psi(x)x^{\frac{s}{2}}\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int_1^\infty y^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\frac{dy}{y}\\ &+ \int_1^\infty \Psi(y)\,y^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\frac{dy}{y} - \frac{1}{2}\int_1^\infty y^{-\frac{s}{2}}\frac{dy}{y}\\ &= \int_1^\infty \Psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right)\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int_1^\infty \left(x^{\frac{1-s}{2}} - x^{\frac{s}{2}}\right)\frac{dx}{x}.\end{aligned}$$

Esta última integral se puede evaluar elementalmente con la fórmula

$$\int_1^\infty x^{-a}\frac{dx}{x} = \left[-\frac{1}{a}x^{-a}\right]_1^\infty = \frac{1}{a}$$

para $a > 0$. Por lo tanto obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_1^\infty \left(x^{\frac{1-s}{2}} - x^{\frac{s}{2}}\right)\frac{dx}{x} &= \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-\frac{(s-1)}{2}}\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{\frac{s}{2}}\frac{dx}{x}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{s-1} - \frac{2}{s}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2s-2s+2}{s(s-1)} = -\frac{1}{s(1-s)}\end{aligned}$$

porque $s > 1$, que teníamos por hipótesis y así $s - 1 > 0$. Este resultado nos dice que:

$$\int_0^\infty \Psi(x) x^{\frac{s}{2}} \cdot \frac{dx}{x} = \int_1^\infty \Psi(x) \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}} \right) \frac{dx}{x} - \frac{1}{s(1-s)},$$

entonces podemos concluir la misma fórmula a la que llega Riemann en la ecuación A.14:

$$\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \int_1^\infty \Psi(x) \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}} \right) \frac{dx}{x} - \frac{1}{s(1-s)}. \tag{2.3.10}$$

Ahora, claramente el lado derecho de esta igualdad queda invariante al sustituir s por $1 - s$ porque $1 - (1 - s) = s$. Entonces con esto Riemann demuestra que el *lado izquierdo* queda invariante al hacer el cambio $s \to 1 - s$ y así da la otra demostración de la ecuación funcional de $\zeta(s)$. Es interesante que no menciona que obtiene otra demostración de la ecuación funcional de $\zeta(s)$.

Al terminar esta parte, hemos visto que el cambio de variable que motivó la segunda demostración de la ecuación funcional, $s - 1 \to \frac{s}{2} - 1$, es lo que obligó a que la serie de exponenciales que aparece en el segundo paso de la demostración sea efectivamente $\Psi(x)$ y no la otra suma $\sum e^{-nx}$, que es una serie geométrica. Por la forma en que hace las cuentas Riemann, es claro que manejaba muy bien la función $\Psi(x)$. El paso crucial de la demostración de la segunda ecuación funcional es usar la ecuación funcional de $\Psi(x)$. Esto garantiza que Riemann ya conocía esta ecuación. Por lo tanto es probable que la aparición de $\sum e^{-nx}$ llevo Riemann a pensar en $\Psi(x)$ lo cual le recordó su ecuación funcional.

A priori no es claro cómo la ecuación funcional de $\Psi(x)$, que relaciona $\Psi(x)$ con $\Psi\left(x^{-1}\right)$, implique una relación entre $\zeta(s)$ y $\zeta(1-s)$, pero podemos especular sobre cómo se le ocurrió a Riemann la relación entre estas dos ecuaciones funcionales. Cuando hace el cambio $x \to x^{-1}$ sólo sobre el intervalo $(0, 1)$, él hace que el término $x^{s/2}$ en el integrando de 2.3.7 se convierta en $x^{-s/2}$ *sin perder el término* $x^{s/2}$ ya que el cambio de variable no se está haciendo sobre todo el dominio de integración. La aparición de los términos $x^{s/2}$ y $x^{-s/2}$ en la misma fórmula (ecuación 2.3.9 en la ecuación A.13 del artículo de Riemann), junto con el término $x^{1/2}$ que aparece al usar la ecuación funcional de $\Psi(x)$, permite a Riemann establecer una relación entre $x^{s/2}$ y $x^{(1-s)/2}$ que ultimadamente implica una relación entre s y $1 - s$ en el lado derecho de 2.3.10.

A posteriori, demostrar dos veces la ecuación funcional le permite a Riemann encontrar una función que se comporte como $\zeta(s)$ y que cumpla una ecuación funcional muy parecida pero mucho más sencilla; esto permite un estudio menos enredado de las simetrías de $\zeta(s)$ que será clave para los próximos resultados que obtiene Riemann en su artículo.

Esta función nueva es justo el lado izquierdo de 2.3.10. En la sección que sigue veremos que aquella función sigue cumpliendo las características que queremos estudiar de $\zeta(s)$ y además cumple otras propiedades muy importantes que simplifican el estudio de $\zeta(s)$.

2.4. La función $\xi(t)$

La fórmula 2.3.10 le permite a Riemann definir una función entera de manera natural. El lado derecho tiene polos en $s = 0$ y $s = 1$ gracias al último sumando. La integral converge para toda $s \in \mathbb{C}$ pues ya habíamos visto en la sección 1,5 que $\Psi(x)$ se hace cero más rápido que cualquier potencia negativa de x cuando $x \to \infty$. Entonces efectivamente los únicos polos del lado derecho de 2.3.10 son $s = 0, 1$. Como éstos son simples, Riemann multiplica por $\frac{1}{2}s(1 - s)$ ambos lados para cancelar estos polos y obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2} \int_1^\infty \Psi(x) \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}} \right) \frac{dx}{x} &= (s-1)\frac{s}{2}\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) \\
&= (s-1)\Pi\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) \qquad (2.4.1)
\end{aligned}$$

cuyo lado izquierdo sigue siendo invariante bajo el cambio $s \leftrightarrow 1 - s$, ya que multiplicamos por un factor $\frac{1}{2}s(1 - s)$ que también es invariante bajo el cambio $s \leftrightarrow 1 - s$.

Es importante notar que 2.4.1 es una función entera porque cancelamos los únicos polos que tenía el lado derecho de 2.3.10. Otra forma de ver que 2.4.1 ya no tiene polos es viendo los posibles puntos problemáticos que son: $s = 1$ cuando $\zeta(s)$ se indetermina, y los puntos $s = -2n$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ donde

$\Pi\left(\frac{s}{2}\right)$ tiene polos simples. Primero, cuando $s=1$, el polo simple de $\zeta(s)$ se cancela con el cero del factor $(1-s)$ y cuando $s=-2n$, los polos simples de $\Pi\left(\frac{s}{2}\right)$ se cancelan con los ceros triviales de $\zeta(s)$ (sección 2.2 ó [13, líneas 20-21]).

En lugar de usar 2.4.1 tal cual, Riemann hace un cambio de variable $s=\frac{1}{2}+it$ (toma $t\in\mathbb{C}$) y define [13, línea 39 y ecuación A.15]:

$$\begin{aligned}\xi(t) &= (s-1)\Pi\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\\ &= \left(-\frac{1}{2}+it\right)\Pi\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)\pi^{\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right).\end{aligned}$$

Este cambio parece complicar las cosas pero es probable que Riemann lo hiciera porque más adelante, este cambio ilustra mejor las simetrías de la función $\xi(t)$. Al parecer, Riemann quería exhibir la simetría

$$(s-1)\Pi\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=((1-s)-1)\Pi\left(\frac{(1-s)}{2}\right)\pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\zeta(1-s)$$

que es una reflexión con respecto del punto $s=\frac{1}{2}$, pues esa simetría se puede reescribir como $s=-\left(s-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$. Lo que hace el cambio de variable de Riemann es mover el punto de reflexión al origen. Esto, posteriormente en el artículo, tiene un propósito analítico bastante preciso. Se usa la reflexión $t\leftrightarrow -t$, resultante del cambio $s=\frac{1}{2}+it$, para una propiedad de funciones enteras cuando Riemann quería demostrar la fórmula del producto de $\xi(t)$.

El cambio de variable $s=\frac{1}{2}+it$ recorre el plano $\frac{1}{2}$ a la derecha y luego lo rota por π. La rotación no es inmediatamente necesaria, pero lo que hace es mandar la recta $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ al eje real y la región $0\le \mathrm{Re}(s)\le 1$ en la región $-\frac{i}{2}\le \mathrm{Im}(t)\le\frac{i}{2}$. El hecho que la recta $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ ahora es el eje real facilita el uso del teorema sobre funciones enteras que usó Riemann [13, líneas 57-60]. La teoría de funciones enteras todavía era joven a mediados del siglo diecinueve, y no fue hasta que Hadamard avanzó en esa área a finales del sigo diecinueve, en particular con su artículo "Étude sur les propiétés des fonctions entiére et en particulier d'une fontion considérée par Riemann" en 1893, donde resuelve algunos problemas que tenía este artículo. Eso se verá en la próxima sección.

Después de definir su nueva función, Riemann calcula otras dos fórmulas para $\xi(t)$ a partir de 2.3.10 para poder decir algo del comportamiento de $\xi(t)$. La primera fórmula se puede deducir a partir de que el factor

$$\frac{1}{x}\left(x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}}\right)=x^{\frac{s}{2}-1}+x^{\frac{1-s}{2}-1}=x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}} \tag{2.4.2}$$

es similar a la definición del coseno hiperbólico. Como hace un cambio de variable donde aparece una i, Riemann usa el coseno para la siguiente expresión de $\xi(t)$ [13, ecuación A.16]. Si hacemos el cambio $s=\frac{1}{2}+it$, entonces el factor anterior se vuelve

$$x^{\frac{1}{4}+\frac{it}{2}-1}+x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{it}{2}}=x^{-\frac{3}{4}}\left(x^{i\frac{t}{2}}+x^{-i\frac{t}{2}}\right).$$

Usamos la fórmula del coseno (como función de una varable compleja) para concluir que lo anterior se reduce a:

$$2x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{t}{2}\log x\right).$$

Para poder sustituir esto en la definición de $\xi(t)$ (lado izquierdo de 2.4.1) sólo falta ver que

$$\frac{s(1-s)}{2}=\frac{\left(\frac{1}{2}+it\right)\left(1-\frac{1}{2}-it\right)}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+it\right)\left(\frac{1}{2}-it\right)=\frac{1}{2}\left(t^2+\frac{1}{4}\right).$$

Por lo tanto obtenemos la fórmula

$$\xi(t)=\frac{1}{2}-\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\int_1^{\infty}\Psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)dx \tag{2.4.3}$$

que deduce Riemann inmediatamente después de definir $\xi(t)$ [13, ecuación A.16].

Observemos que esta expresión queda invariante bajo el cambio $t \leftrightarrow -t$ porque $\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)$ es una función par de t. La paridad de $\xi\,(t)$ es consecuencia directa de la paridad del coseno, por lo tanto deducimos de manera inmediata la ecuación funcional

$$\xi\,(t) = \xi\,(-t)\,.$$

Hemos llegado a una fórmula a la que ya habíamos aludido y sugiere que vamos en el camino correcto. Esta paridad no la menciona Riemann porque queda implícito en el hecho que $s \leftrightarrow 1-s$ si y sólo si $t \leftrightarrow -t$ cuando $s = \frac{1}{2} + it$, lo cual, junto con la simetría $\xi(s) = \xi(1-s)$, implica que ξ como función de t es par.

Riemann no se queda con esta expresión y propone otra. Esto lo hace porque quiere deducir una expresión para su serie de Taylor. El problema es que el término constante de 2.4.3 no le permite analizar bien el comportamiento de $\xi\,(t)$ en el 0 donde está la obvia ventaja geométrica de la simetría de $\xi\,(t)$. La expresión 2.4.3 tampoco permite una visión clara de cómo será su serie de Taylor (la función $\xi\,(t)$ es una función entera y tiene una serie de Taylor convergente en todo el plano complejo) cerca del cero que sería una excelente herramienta para analizar la función $\xi\,(t)$.

Riemann no explica cómo deduce la segunda expresión de $\xi(t)$ y, cómo lo hace no es nada clara de la ecuación anterior (ecuación A.16)

Para deducir su próxima fórmula, usamos la variable s (la definición de $\xi\,(t)$ ultimadamente se define con s) en lugar de t y recurrimos a la definición 2.4.1. Primero observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\Psi(x)\left[\frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2}\right]\right) &= \Psi'(x)\left[\tfrac{x^{s/2}}{s/2} + \tfrac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2}\right] + \Psi(x)\left[x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{1-s}{2}-1}\right] \\
&= \Psi'(x)\left[\tfrac{x^{s/2}}{s/2} + \tfrac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2}\right] + \tfrac{\Psi(x)}{x}\left[x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right],
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{\Psi(x)}{x}\left[x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right] = \frac{d}{dx}\left(\Psi(x)\left[\frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2}\right]\right) - x\Psi'(x)\left[\frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2}\right]$$

donde el lado izquierdo es el integrando de 2.4.1. Entonces si lo sustituimos en el integrando tenemos que

$$\begin{aligned}
\xi\,(t) &= \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2}\int_1^\infty \frac{d}{dx}\left(\Psi(x)\left[\frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2}\right]\right)dx \\
&\quad + \frac{s(1-s)}{2}\int_1^\infty \Psi'(x)\left[\frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2}\right]dx \\
&= \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2}\left[\Psi(x)\left[\frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2}\right]\right]_1^\infty + \int_1^\infty \Psi'(x)\left[(1-s)x^{\frac{s}{2}} + sx^{\frac{1-s}{2}}\right]dx. \quad (2.4.4)
\end{aligned}$$

Ahora, sabemos que $\Psi(x) \to 0$ más rápido que cualquier potencia de x negativa, entonces

$$\lim_{x\to\infty}\Psi(x)\left[\frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2}\right] = 0$$

y así tenemos que

$$\left[\Psi(x)\left[\frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2}\right]\right]_1^\infty = \Psi\,(1)\left(\frac{2}{s} + \frac{2}{1-s}\right) = \frac{2}{s(1-s)}\Psi\,(1)\,.$$

Si sustituimos esto en 2.4.4, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\xi\,(t) &= \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2}\frac{2}{s(1-s)}\Psi\,(1) + \int_1^\infty \Psi'(x)\left[(1-s)x^{\frac{s}{2}} + sx^{\frac{1-s}{2}}\right]dx \\
&= \frac{1}{2} + \Psi\,(1) + \int_1^\infty \Psi'(x)\left[(1-s)x^{\frac{s}{2}} + sx^{\frac{1-s}{2}}\right]dx. \qquad (2.4.5)
\end{aligned}$$

Ahora consideremos otra derivada:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\left(-2x^{-\frac{1-s}{2}}-2x^{-\frac{s}{2}}\right)\right)\\
&= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\right)\left(-2x^{-\frac{1-s}{2}}-2x^{-\frac{s}{2}}\right)+x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\left((1-s)x^{-\frac{1-s}{2}-1}+sx^{-\frac{s}{2}-1}\right)\\
&= -\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\right)\left(2x^{-\frac{1-s}{2}}+2x^{-\frac{s}{2}}\right)+x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\left((1-s)x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}+sx^{-\frac{s}{2}-1}\right)\\
&= -\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\right)\left(2x^{-\frac{1-s}{2}}+2x^{-\frac{s}{2}}\right)+\Psi'(x)\left((1-s)x^{\frac{s}{2}}+sx^{\frac{1-s}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
&\Psi'(x)\left((1-s)x^{\frac{s}{2}}+sx^{\frac{1-s}{2}}\right)\\
&= \frac{d}{dx}\left\{x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\left(-2x^{-\frac{1-s}{2}}-2x^{-\frac{s}{2}}\right)\right\}+\frac{d}{dx}\left\{x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\right\}\left(2x^{-\frac{1-s}{2}}+2x^{-\frac{s}{2}}\right)
\end{aligned}$$

donde el lado izquierdo es, a su vez, el integrando de 2.4.5, entonces sustituimos:

$$\begin{aligned}
\xi(t) &= \frac{1}{2}+\Psi(1)+\int_1^\infty \frac{d}{dx}\left\{x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\left(-2x^{-\frac{1-s}{2}}-2x^{-\frac{s}{2}}\right)\right\}dx\\
&\quad+\int_1^\infty \frac{d}{dx}\left\{x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\right\}\left(2x^{-\frac{1-s}{2}}+2x^{-\frac{s}{2}}\right)dx\\
&= \frac{1}{2}+\Psi(1)+\left[x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\left(-2x^{-\frac{1-s}{2}}-2x^{-\frac{s}{2}}\right)\right]_1^\infty\\
&\quad+\int_1^\infty \frac{d}{dx}\left\{x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\right\}\left(2x^{-\frac{1-s}{2}}+2x^{-\frac{s}{2}}\right)dx.
\end{aligned}$$

Como $\Psi(x)$ es una función del espacio de Schwartz (sección 1.6), $S\left(\mathbb{R}^+\right)$, tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\left(-2x^{-\frac{1-s}{2}}-2x^{-\frac{s}{2}}\right)=0$$

y así

$$\begin{aligned}
\xi(t) &= \frac{1}{2}+\Psi(1)-\Psi'(1)(-2-2)\\
&\quad+\int_1^\infty \frac{d}{dx}\left\{x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\right\}\left(2x^{-\frac{1-s}{2}}+2x^{-\frac{s}{2}}\right)dx.
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Ahora, recordemos la ecuación funcional de $\Psi(x)$:

$$2\Psi(x)+1=x^{-\frac{1}{2}}\left(2\Psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right),$$

entonces si derivamos esta ecuación con resecto de x obtenemos

$$\begin{aligned}
2\Psi'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2\Psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)+x^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(2\Psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)\\
&= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\left(2\Psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)+x^{-\frac{1}{2}}\left(2\Psi'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= -x^{-\frac{3}{2}}\Psi\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-2x^{-\frac{5}{2}}\Psi'\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Si evaluamos en $x=1$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
2\Psi'(1) &= -\Psi(1)-\frac{1}{2}-2\Psi'(1)\\
\therefore\quad \frac{1}{2}+\Psi(1)+4\Psi'(1) &= 0.
\end{aligned}$$

Entonces si sustituimos esto en 2.4.6, se anulan casi todos los términos y sobrevive sólo la integral:

$$\xi(t) = \int_1^\infty \frac{d}{dx}\left\{x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\right\}\left(2x^{-\frac{1-s}{2}} + 2x^{-\frac{s}{2}}\right)dx. \tag{2.4.7}$$

Recordemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right) &= x^{\frac{1}{4}+\frac{it}{2}-1} + x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{it}{2}} = x^{-\frac{3}{4}}\left(x^{i\frac{t}{2}} + x^{-i\frac{t}{2}}\right) \\ &= 2x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{t}{2}\log x\right) \end{aligned}$$

entonces sólo hay que cambiar el signo de los exponentes y tenemos

$$\begin{aligned} x^{-\frac{s}{2}} + x^{-\frac{1-s}{2}} &= x^{-\frac{1}{4}-\frac{it}{2}} + x^{-\frac{1}{4}+\frac{it}{2}} = x^{-\frac{1}{4}}\left(x^{i\frac{t}{2}} + x^{-i\frac{t}{2}}\right) \\ &= 2x^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{t}{2}\log x\right) \\ \therefore \quad 2x^{-\frac{1-s}{2}} + 2x^{-\frac{s}{2}} &= 4x^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{t}{2}\log x\right). \end{aligned}$$

Ahora sustituimos esta igualdad en 2.4.7 y obtenemos por último la segunda fórmula de Riemann para $\xi(t)$ [13, ecuación A.17]:

$$\xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d}{dx}\left\{x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\right\}x^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{t}{2}\log x\right)dx.$$

Esta fórmula es más fácil de analizar, de hecho es posible definirle una serie de potencias usando la serie del coseno. Riemann dice que esta expresión permite representar a $\xi(t)$ como una serie en t^2 que converge rápidamente en todo el plano [13, líneas 42-43]. Esto justifica desarrollar otra fórmula para $\xi(t)$.

Riemann no muestra explícitamente la serie de potencias de $\xi(t)$ pero no es difícil deducirla. El término $\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)$ es el que proporciona una serie en t^2. Si usamos la serie de Taylor del coseno

$$\cos y = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!},$$

que converge absoluta y uniformemente en cualquier subconjunto compacto del plano complejo, y lo sustituimos en la fórmula de Riemann tenemos:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= 4\int_1^\infty \frac{d}{dx}\left\{x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\right\}x^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{2}t\log x\right)^{2n}}{(2n)!}dx \\ &= \int_1^\infty \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left\{x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\right\}x^{-\frac{1}{4}}(-1)^n\,4\frac{t^{2n}\log^{2n}x}{2^{2n}(2n)!}dx. \end{aligned}$$

Como $\Psi(x)$ está en el espacio de Schwartz, entonces la serie converge uniformemente sobre $x \in (1,\infty)$ porque

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\right\}x^{-\frac{1}{4}}\log^{2n}x$$

decrece a 0 más rápido que cualquier potencia negativa de x para todo n. Así se puede acotar lo anterior, sobre el intervalo $(1,\infty)$, por una constante y se puede aplicar la prueba M de Weierstrass. Entonces al intercambiar la serie con la suma tenemos:

$$\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2^{2n-2}(2n)!}\int_1^\infty \frac{d}{dx}\left\{x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\right\}x^{-\frac{1}{4}}\log^{2n}x\,dx.$$

Si definimos

$$a_{2n} := \frac{(-1)^n}{2^{2n-2}(2n)!}\int_1^\infty \frac{d}{dx}\left\{x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\right\}x^{-\frac{1}{4}}\log^{2n}x\,dx$$

entonces tendremos que

$$\xi\,(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} t^{2n}.$$

No es obvio a que velocidad converge la serie, pero en el denominador de a_{2n} aparecen los términos $2^{2n-2}\,(2n)!$ y en el numerador sólo aparece el término $\log^{2n} x$ en el integrando que se neutraliza por la convergencia rápida al cero del factor $\Psi'(x)$. Entonces el término $\log^{2n} x$ casi no aporta al crecimiento de a_{2n}, por lo tanto es claro que la serie converge muy rápido como menciona Riemann [13, líneas 42-43].

2.5. Los ceros de $\xi\,(t)$

Las siguientes 18 líneas [13, líneas 43-60] del artículo de Riemann son muy especiales, en ellas condensa cuatro de las seis preguntas que dejó abiertas. El propósito de esta parte es demostrar que la función $\xi\,(t)$ se puede expresar como un producto infinito de la forma

$$\xi\,(t) = \xi\,(0) \prod_{\alpha} \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right) \tag{2.5.1}$$

que corre sobre las raíces α de $\xi\,(t)$. Al intentar demostrar 2.5.1 Riemann dejó más preguntas abiertas que respuestas y al final no pudo demostrar rigurosamente la fórmula del producto. A pesar de que están muy incompletas las matemáticas expuestas por Riemann en esos dos párrafos, sin duda podrían ser los más interesantes en toda la historia de la teoría analítica de los números.

Lo primero que hace Riemann en estas 18 líneas [13, líneas 43-45] es encontrar en qué región del plano complejo están las raíces de $\xi(t)$. En este trabajo, a las raíces de $\xi(t)$ las llamamos *los ceros de* $\xi(t)$. En la definición de $\xi\,(t)$ tenemos un producto de tres factores

$$\xi\,(t) = (s-1)\Pi\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s),$$

entonces hay que analizar los ceros de cada factor para estudiar los ceros de $\xi(t)$.

Riemann afirma que:

> Since, for a value of s whose real part is greater than 1, $\log\zeta(s) = -\sum\log(1-p^{-s})$ remains finite, and since the same holds for the logarithms of the other factors of $\xi(t)$,

para decir que los factores de $\xi(t)$ son distintos de cero en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1$ o equivalentemente $\mathrm{Im}(t) > 1/2$.

Recordemos que $\Pi\,(s/2)$ es una función que no tiene ceros al igual que $\pi^{-s/2}$ y que el factor $(s-1)$ tiene un cero en $s = 1$ que se cancela con el polo simple de $\zeta(s)$. Entonces, *los únicos ceros que podría tener la función* $\xi(t)$ *son los ceros de* $\zeta(s)$, pero habíamos visto que ésta tenía ceros triviales en $s = -2n$ para toda $n \geq 1$. El factor $\Pi\,(s/2) = \Pi\,(-2n/2) = \Pi(-n)$ tiene polos simples justo en esos valores. Entonces todos los ceros triviales de $\zeta(s)$ se cancelan. Por lo tanto los ceros de $\xi\,(t)$ son los ceros de $\zeta(s)$ que *no son triviales.*

Riemann dice que $\log\zeta(s)$ se mantiene finito en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1$ porque la serie $-\sum\log(1-p^{-s})$ es finita en ese semiplano. Aquí, él esta haciendo referencia clara al logaritmo del producto de Euler

$$\log\zeta(s) = \log\prod_{p}\left(1-p^{-s}\right)^{-1} = -\sum\log(1-p^{-s})$$

y al hecho que un producto infinito convergente se anule si y sólo si algún factor se anula. Con esto, Riemann concluye que un cero de $\zeta(s)$ *no* puede estar en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1$ porque en este semiplano, $\zeta(s)$ tiene expresión en producto infinito convergente donde ningún factor se anula.

Recordemos que la paridad de $\xi\,(t)$ nos dice que α es cero de $\xi\,(t)$ si y sólo si $-\alpha$ también es cero. Si ρ es un cero no trivial de $\zeta(s)$, entonces $\alpha = \frac{1}{2}i - is$ es un cero de $\xi(t)$, entonces $-\alpha = is - \frac{1}{2}i$ también es un cero de $\xi(t)$. Con esto concluimos que $1 - \rho = \frac{1}{2}$ es un cero no trivial de $\zeta(s)$.

No es sorprendente que la simetría de los ceros de $\xi(t)$ proviene de la simetría que exhibe la ecuación funcional de $\zeta(s)$. Esta dualidad entre los ceros no triviales de $\zeta(s)$, nos permite localizarlos mejor. Ya vimos que si ρ es un cero no trivial de $\zeta(s)$, entonces necesariamente $\mathrm{Re}\,(\rho) \leq 1$. Pero $1-\rho$ también es cero y cumple lo mismo: $\mathrm{Re}\,(1-\rho) \leq 1$ que es equivalente a $0 \leq \mathrm{Re}\,(\rho)$. Por lo tanto hemos demostrado:

Proposición. Todos los ceros de $\xi(t)$, i.e. los ceros no triviales de $\zeta(s)$, están en la región $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$.

Esto es lo mismo que dice Riemann cuando afirma que las partes imaginarias de $t = -i\left(s - \frac{1}{2}\right)$ deben quedar entre $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ [13, línea 45]. Esto se sigue inmediatamente del cambio de variable $s = \frac{1}{2} + it$: si escribimos $s = \sigma + \tau i$, con σ y τ la parte real e imaginaria de s respectivamente, entonces

$$\mathrm{Im}\,(t) = -\mathrm{Im}\,(is) + \frac{1}{2}\mathrm{Im}\,(i) = -\mathrm{Im}\,(-\tau + \sigma i) + \frac{1}{2} = -\sigma + \frac{1}{2}$$

y así tenemos que

$$-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Im}\,(t) \leq \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq \sigma \leq 1$$

lo cual concuerda con la afirmación de Riemann que hace de la localización de los ceros de $\xi(t)$.

Después Riemann quiere calcular *cuántos* ceros están en la región anterior. Dice:

> The number of roots of $\xi(t) = 0$, whose real parts lie between 0 and T is approximately
>
> $$= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi};$$
>
> because the integral $\int d\log\xi(t)$, taken in a positive sense around the region consisting of the values of t whose imaginary parts lie between $\frac{1}{2}i$ and $-\frac{1}{2}i$ and whose real parts lie between 0 and T, is (up to a fraction of the order of magnitude of the quantity $\frac{1}{T}$) equal to $\left(T\log\frac{T}{2\pi} - T\right)i$; this integral however is equal to the number of roots of $\xi(t) = 0$ lying within in this region, multiplied by $2\pi i$.

Según Riemann, la cantidad de raíces $\xi(t) = 0$ cuya parte real está entre 0 y T es como

$$\frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi}$$

con un error relativo de T^{-1} [13, líneas 48-49]. Esto lo sustenta usando el principio del argumento[5]: toma como contorno la frontera del rectángulo

$$R_T = \left\{t \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Re}\,(t) \leq T, -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Im}\,(t) \leq \frac{1}{2}\right\}$$

[13, líneas 47-48], y calcula la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_T}\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}dt, \tag{2.5.2}$$

que por el principio del argumento es la cantidad de ceros menos la cantidad de polos en R_T, pero ya habíamos visto que $\xi(t)$ es entera entonces no hay polos. Por lo tanto la integral 2.5.2 es la cantidad de ceros en R_T.

Aquí a Riemann le faltó justificar que *no* hay ceros en la frontera de R_T, es decir, no hay ceros de $\xi(t)$ con parte imaginaria $\mathrm{Im}\,(t) = \pm\frac{1}{2}$. Para poder aplicar el principio del argumento es necesario que la curva cerrada sobre la cual se está integrando *no* pase por un cero o un polo de $\xi(t)$.

Este paso es *esencial* para justificar formalmente la convergencia de la fórmula del producto de $\xi(t)$. Este es el primer problema que deja Riemann sin resolver. Este hecho fue probado 40 años después, independientemente, por Hadamard y De la Vallée Poussin, para demostrar el Teorema fundamental de los números primos. Tres años antes, en 1893, Hadamard demostró que la fórmula del producto convergía sin tener que usar el principio del argumento [8].

Riemann consideraba rectángulos nada más en el semiplano $\mathrm{Re}\,(t) \geq 0$ pues cada cero α de $\xi(t)$ tiene su pareja $-\alpha$, entonces, en lugar de contar *todos* los ceros tomando el rectángulo de $-T$ a T, duplica la cantidad que obtiene al tomar el rectángulo de 0 a T. De hecho, no cruzar el cero permite manipular más fácilmente las integrales que aproximan la cantidad de ceros en estos rectángulos. Estas integrales no las propone directamente Riemann pero surgen cuando se quiere ver que converge la fórmula del producto.

[5] El Principio del argumento dice que si $f(z)$ es una función meromorfa en un abierto Ω con ceros a_j y polos b_k, entonces $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_j n(\gamma, a_j) - \sum_k n(\gamma, b_k)$.

Los métodos que usó Riemann para 'demostrar' la aproximación no están expuestos en su artículo y nunca publicó cómo aproximó la integral 2.5.2:

$$\int_{\partial R_T} \frac{\xi'(t)}{\xi(t)} dt \sim iT \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - iT \tag{2.5.3}$$

de tal manera que el cociente de ambos lados tiende a 0 cuando $T \to \infty$, a la misma velocidad a la que T^{-1} hace esto. No se logró demostrar esto hasta 1905 cuando von Mangoldt demostró que sí era válida esta aproximación [15].

Lo siguiente que dice Riemann es todavía más fuerte que su aproximación:

> One now finds
> indeed approximately this number of real roots within these limits,

La aproximación 2.5.3 nos dice cuantos ceros tiene $\xi(t)$ en el rectángulo R_T, pero Riemann afirma que esta aproximación funciona también para los ceros reales, i.e. $t \in \mathbb{R}$. Esto es, si hacemos $N(T)$ igual a la cantidad de ceros de $\xi(t)$ cuyas partes reales están entre 0 y T, y hacemos $\hat{N}(T)$ igual a los ceros de $N(T)$ pero que *también* son reales, entonces Riemann afirmó que

$$\begin{aligned} N(T) &\sim \frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} \\ \hat{N}(T) &\sim \frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi}. \end{aligned}$$

Lo anterior significa que la aproximación $N(T)$ que funciona para calcular la cantidad de ceros totales de $\xi(t)$ es *la misma* que aproxima los ceros que nada más están en la recta real . Esta "afirmación" que hizo Riemann no se ha podido demostrar a pesar de que la forma en que lo expone sugiere que pensaba que tenía una demostración de este hecho.

El génesis de esta idea que propone Riemann es completamente desconocido. No se sabe bien qué fue lo que lo motivó a decir que *casi todos* los ceros eran reales, de hecho hasta ahora no hemos calculado un solo cero de $\xi(t)$ y no hemos verificado si en verdad $\xi(t)$ tiene ceros. La fórmula 2.5.3 nos afirma que sí los hay, pero Riemann nunca demuestra este hecho. Pero lo más sorprendente de la afirmación que hace es lo que se desenvuelve a partir de ella.

Como consecuencia de las líneas 50-51, Riemann lanza la siguiente conjetura:

> and it is very probable that all roots
> are real.

Riemann argumenta que si a $N(T)$ y a $\hat{N}(T)$ las aproxima *la misma función*, entonces la gran mayoría de los ceros están en el eje real. Este hecho lleva a Riemann a conjeturar que *todos* los ceros están en el eje real. Esta conjetura la reescribimos:

Conjetura. *Todos los ceros de $\xi(t)$ son reales.*

Esta conjetura es la famosa "Hipótesis de Riemann" y posiblemente una de las afirmaciones más misterioras en la literatura matemática. En 1929, el matemático alemán, Carl Ludwig Siegel juntó las notas de Riemann que había donado su viuda a la biblioteca de Göttingen donde Riemann era jefe del Departamento de Matemáticas. En las notas, Siegel descubrió una fórmula que había deducido Riemann y unos cálculos de los primeros ceros de $\xi(t)$. Esto ya aterriza la hipótesis de Riemann pues, en sus notas, tenía un análisis computacional extenso de $\xi(t)$, entre eso la fórmula mencionada que se conoce hoy en día como la fórmula de Riemann-Siegel.

Quizá después de calcular algunos ceros de $\xi(t)$, Riemann pensó que la gran cantidad de ceros reales sí implicaría que *todos* los ceros eran reales. Eso puede quitar un poco el misterio de su conjetura pero nada de lo que escribe en su artículo ni de lo que encuentra Siegel en sus notas puede completamente justificar la increíble intuición que tuvo Riemann en hacer su conjetura. El hecho que todos los ceros sean reales no le sirve de nada para el artículo, y pudo no haber dicho nada sobre la aproximación de $\hat{N}(T)$ ni sobre su hipótesis, pero lo dijo y sí hay algo misterioso en qué tan atinado fue Riemann. ¡Hoy se ha verificado la hipótesis para los primeros 10^{13} ceros de $\xi(t)$!

Después de su conjetura, él menciona que no tiene una demostración de que efectivamente los ceros de $\xi(t)$ son reales y que lo deja así porque no es necesario para el proposito de su artículo [13, líneas 52-54]. Esta aceptación de que no tenía la demostración *sugiere que sí tenía una demostración* para la aproximación misteriosa

$$\hat{N}(T) \sim \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi}.$$

Cabe mencionar que la hipótesis de Riemann no se escribe así. Habla de los ceros no triviales de $\zeta(s)$, pero como la variable es s, entonces

$$t \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Re}(s) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} + it\right) = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto la conjetura queda como

Conjetura. *(Moderna) Todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$ tienen parte real igual a $\frac{1}{2}$.*

Aquí Riemann deja todo y se sigue a demostrar la fórmula del producto de $\xi(t)$.

Lo siguiente son los argumentos que dió Riemann para 'demostrar' porqué se puede expresar $\xi(t)$ como un producto infinito. Estas razones las expone sin justificar y son necesarias porque la prueba formal es mucho más complicada como para llamar el resto del párrafo [13, líneas 55-60] una demostración formal de 2.5.1.

Riemann expresa a $\xi(t)$ como un producto de sus raíces y toma el logaritmo. Sabemos que un producto infinito converge si y sólo si su serie de logaritmos converge, entonces Riemann lleva la cuestión de convergencia a la serie de logaritmos:

$$\prod_{\alpha}\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right) \longleftrightarrow \sum_{\alpha} \log\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right).$$

Entonces, si converge la serie, converge el producto y un paso muy importante se habrá dado para demostrar que $\xi(t)$ se puede expresar como un producto infinito.

Afirma [13, línea 55] que, si α es un cero de $\xi(t)$, entonces

$$\log \xi(t) = \sum_{\alpha} \log\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right) + \log \xi(0). \tag{2.5.4}$$

Esta relación se deduce simplificando la serie asociada al producto; lo que hace es juntar cada cero α con su pareja $-\alpha$. Entonces la suma queda como

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} \log\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right) &= \sum_{\operatorname{Re}(\alpha)>0} \log\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right) + \log\left(1 - \frac{t}{-\alpha}\right) \\ &= \sum_{\operatorname{Re}(\alpha)>0} \log\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right).\end{aligned}$$

Con esta expresión reescribimos el producto como

$$\prod_{\alpha}\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right) = \prod_{\operatorname{Re}(\alpha)>0}\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right).$$

Para demostrar la afirmación 2.5.4 que hace Riemann [13, ecuación A.19] se necesitan esencialmente dos cosas: primero, demostrar la convergencia del producto anterior; después comparar la función que define el producto con $\xi(t)$ para poder establecer una relación. La fórmula del producto nos dice que el cociente entre $\xi(t)$ y el producto infinito es $\log \xi(0)$.

Primero argumentamos, usando las razones de Riemann, la convergencia del producto. Sabemos que la convergencia absoluta del producto $\prod\left(1-t^2\alpha^{-2}\right)$ es simultánea con la convergencia absoluta de la serie

$$\sum_{\mathrm{Re}(\alpha)>0} -\frac{t^2}{\alpha^2} = -t^2 \sum_{\mathrm{Re}(\alpha)>0} \frac{1}{\alpha^2}. \tag{2.5.5}$$

Riemann dice que esta serie converge porque "the density of the roots of the quantity t grows with t only as $\log t/2\pi$," [13, línea 56], es decir que la densidad horizontal en el rectángulo R_T de los ceros es de orden $\log T$. Él no demuestra este argumento y por lo pronto no se ve obvio porque debe implicar la convergencia absoluta de 2.5.5.

Para ver cómo el lento crecimiento de la densidad horizontal de los ceros implica la convergencia absoluta de 2.5.5, debemos reinterpretar que significa *físicamente* esta serie. Suponemos[6] que sí es cierta la aproximación que dió Riemann $N(T) \sim \frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi}$, entonces la 'densidad promedia' de los ceros en el rectángulo R_T es la cantidad de ceros que hay en R_T entre el área del rectángulo, es decir, $N(T)/T$. Pero la densidad vista como una función puntual, que depende de la longitud, es tomar la derivada de $N(T)$ con respecto de T (un análogo es decir que la velocidad instantánea es la derivada de la velocidad promedia) y obtenemos que la densidad puntual de los ceros en el rectángulo R_T es

$$\begin{aligned}\frac{d}{dT}N(T) &= \frac{d}{dT}\left(\frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi}\right)\\ &= \frac{T}{2\pi}\frac{d}{dT}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) + \log\left(\frac{T}{2\pi}\right)\frac{d}{dT}\frac{T}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\\ &= \frac{T}{2\pi}\frac{2\pi}{T}\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{1}{2\pi}\\ &= \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right). \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Ahora si le atribuimos un peso de $\frac{1}{|\alpha|^2}$ a cada cero α de $\xi(t)$ en el semiplano $\mathrm{Re}(t) > 0$, la 'masa' total de todos los ceros es justo la serie que aparece en 2.5.5:

$$\sum_{\mathrm{Re}(\alpha)>0} \frac{1}{|\alpha|^2}$$

y la convergencia de la fórmula del producto se reduce a demostrar que esta serie converge.

Entonces encontrar el valor de esa serie es en realidad encontrar la 'masa' de R_∞ donde los únicos puntos que "pesan" son los ceros α y ningún otro punto de R_∞. Esta 'masa' discreta[7] que tiene R_∞ se puede llevar a una masa continua, i.e. usando una variable continua. El peso de cada cero se puede aproximar con

$$\frac{1}{|\alpha|^2} \approx \frac{1}{T^2} \tag{2.5.7}$$

donde $\mathrm{Re}(\alpha) = T$.

Para verificar esto, observemos que los ceros que están en R_∞ cumplen $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Im}(\alpha) \leq \frac{1}{2}$. Si escribimos $\sigma = \mathrm{Re}(\alpha)$ y $\tau = \mathrm{Im}(\alpha)$, entonces para un cero a altura T tenemos

$$|\alpha| = |\sigma + i\tau| = |T + i\tau| = \sqrt{T^2+\tau^2},$$

pero como $-\frac{1}{2} \leq \tau \leq \frac{1}{2}$, entonces $\tau^2 \leq \frac{1}{4}$, y así obtenemos

$$T \leq |\alpha| \leq \sqrt{T^2 + \frac{1}{4}}$$

lo cual justifica nuestra aproximación 2.5.7.

[6] Esta suposición no es en vano pues von Mangoldt sí lo demuestra después.

[7] Como $\xi(t)$ es analítica, sus ceros no se pueden acumular, entonces los ceros, en R_∞ se comportan de manera discreta.

Ya hemos sustituido el peso con una variable continua T, pero sabemos que los ceros no proporcionan el peso a R_∞ de manera continua, entonces tenemos que multiplicar el peso T^{-2} por la densidad de los ceros $\frac{1}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}$ y después integrar sobre $(0,T)$ para obtener una función que nos aproxime el peso (discreto) de los ceros en el rectángulo R_T, es decir:

$$\sum_{\varepsilon<\mathrm{Re}(\alpha)\le T}\frac{1}{|\alpha|^2}\approx\int_\varepsilon^T\frac{1}{2\pi t^2}\log\frac{t}{2\pi}dt.$$

No hemos tomado la integral hasta el cero porque la integral no converge cerca del cero. Esto no causa problemas porque los ceros de la función analítica $\xi(t)$ no se pueden acumular en el eje imaginario, entonces existe un $\varepsilon>0$ fija tal que todos los ceros α cumplen $|\mathrm{Re}(\alpha)|>\varepsilon$. Por lo tanto si queremos ver que la serie $\sum|\alpha|^{-2}$ converge, tenemos que hacer $T\to\infty$ y ver si converge la integral.

Esta integral es sencilla de evaluar porque se le puede encontrar una antiderivada al integrando. Observemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2\pi t}\left(-\log\left(\frac{t}{2\pi}\right)-1\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2\pi t}\frac{d}{dt}\left(-\log\left(\frac{t}{2\pi}\right)-1\right)+\left(-\log\left(\frac{t}{2\pi}\right)-1\right)\frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi t}\\
&=-\frac{1}{2\pi t}\frac{2\pi}{t}\frac{1}{2\pi}+\left(-\log\left(\frac{t}{2\pi}\right)-1\right)\left(-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{t^2}\right)\\
&=-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{t^2}-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{t^2}\left(-\log\left(\frac{t}{2\pi}\right)-1\right)\\
&=\frac{1}{2\pi t^2}\log\left(\frac{t}{2\pi}\right),
\end{aligned}$$

y así tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\frac{1}{t^2}\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{t}{2\pi}\right)dt &= \int_\varepsilon^\infty\frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{2\pi t}\left(\log\left(\frac{t}{2\pi}\right)+1\right)\right\}dt\\
&=\left[-\frac{1}{2\pi t}\left(\log\left(\frac{t}{2\pi}\right)+1\right)\right]_\varepsilon^\infty
\end{aligned}$$

donde

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\pi t}\log\left(\frac{t}{2\pi}\right)+\frac{1}{2\pi t}=0.$$

Por lo tanto

$$\sum_{\mathrm{Re}(\alpha)>0}\frac{1}{|\alpha|^2}\approx\int_\varepsilon^\infty\frac{1}{t^2}\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{t}{2\pi}\right)dt=-\frac{1}{2\pi\varepsilon}\left(\log\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)+1\right)<\infty$$

Lo que acabamos de “demostrar” es básicamente el argumento de que la serie converge porque el “peso” es finito en virtud de la densidad de las α’s que es de orden $\log(T)$. Si la densidad fuera de orden, por ejemplo T, entonces la integral anterior no converge y es posible que el peso sea infinito, i.e. la serie no converge. Este es justo el argumento al que alude Riemann cuando justifica la convergencia de la serie con *sólo* la densidad de los ceros de $\xi(s)$ [13, línea 56], ya que este ritmo de crecimiento es suficiente para la convergencia de la integral y así de la serie.

Habíamos visto que con la convergencia absoluta de la serie

$$\sum_{\mathrm{Re}(\alpha)>0}\frac{1}{|\alpha|^2}$$

tenemos automáticamente la convergencia (absoluta) del producto

$$\prod_\alpha\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)=\prod_{\mathrm{Re}(\alpha)>0}\left(1-\frac{t^2}{\alpha^2}\right).$$

Por lo tanto estamos a medio camino para poder afirmar la fórmula del producto

$$\xi(t) = \xi(0) \prod_{\alpha} \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right).$$

Después de demostrar la convergencia de la serie, Riemann dice "thus it [the series] differs from $\log \xi(t)$ by a function of t^2, that for finite t remains continuous and finite and, when divided by t^2, becomes infinitely small for infinite t" [13, líneas 57-59]. Es decir, que la diferencia

$$f(t) := \log \xi(t) - \sum_{\alpha} \log\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right)$$

es una función entera que al ser dividida por t^2 se hace tan pequeña como queramos. Escrito a la manera actual, tendríamos que para $|t|$ suficientemente grande

$$\frac{|f(t)|}{|t|^2} \leq \varepsilon$$

para toda $\varepsilon > 0$.

Cuando afirma que "This difference is consequently a constant," [13, línea 59], es probable que estuviera usando una versión primitiva del teorema:

Teorema 9. *Sea $f(s)$ una función entera y par. Si para toda $\varepsilon > 0$ existe un radio R tal que* $\mathrm{Re}(f(s)) < \varepsilon|s|^2$ *para todo $|s| \leq R$, entonces $f(s)$ es constante.*[8]

Para usar este teorema se requiere que $f(t)$ sea par, es decir $f(t) \equiv f(-t)$, pero este hecho es fácil de comprobar porque $f(t)$ es una diferencia de funciones pares. Después afirma que la constante se puede determinar haciendo $t = 0$, es decir $f(0) = \log \xi(0)$. Por lo tanto obtenemos la ecuación 2.5.4 o A.19 en el artículo de Riemann.

El razonamiento intuitivo es que tanto $\log \xi(t)$ como $\sum \log\left(1 - t^2\alpha^{-2}\right)$, tienen las mismas singularidades logarítmicas y como ambas son funciones analíticas de la misma variable, entonces son esencialmente la misma función (salvo una constante). Para poder afirmar esto es necesario que también tengan el mismo comportamiento al infinito que es justo lo que justifica Riemann.

Después de esto Riemann se dedica a establecer la relación entre $\zeta(s)$ y su función contadora de primos $J(x)$.

2.6. La fórmula para $J(x)$

En el resto del artículo, Riemann trata de llegar a una relación para $J(x)$ (que él la denota simplemente por $f(x)$) y así encontrar una fórmula analítica para $\pi(x)$ (que él denota por $F(x)$) usando la relación establecida en el Teorema 4 de la sección 1.3.

En las líneas 65-67 de [13], Riemann deduce la fórmula de $\log \zeta(s)$ –que ya vimos en la sección 1.3–:

$$\log \zeta(s) = s \int_0^\infty J(x) x^{-s-1} dx \tag{2.6.1}$$

para $\mathrm{Re}(s) > 1$. Después deduce su propia transformada de Mellin [13, líneas 70-79], basándose en el teorema de inversión de Fourier, –que ya habíamos visto en la sección 1.4.1–, para despejar $J(x)$ y obtener la fórmula 1.4.7 de la sección 1.4.1:

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\log \zeta(s)}{s} x^s ds, \tag{2.6.2}$$

que es válida para $x > 1$, donde $\mathrm{Re}(s) = a > 1$. Es importante observar que esta igualdad es independiente de la elección de $a > 1$.

[8] Véase Edwards [4, página 45]

Después de esto, Riemann usa la definición de $\xi(t) = (s-1)\Pi\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$ y la fórmula del producto de $\xi(t)$ para despejar $\zeta(s)$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1}\frac{1}{\Pi\left(\frac{2}{s}\right)}\pi^{\frac{s}{2}}\xi(t) = \frac{1}{s-1}\frac{1}{\Pi\left(\frac{2}{s}\right)}\pi^{\frac{s}{2}}\xi(0)\prod_{\alpha}\left(1-\frac{t^2}{\alpha}\right)$$

donde α son los ceros de $\xi(t)$.

La fórmula del producto que obtuvimos en la sección anterior era con variable t:

$$\xi(t) = \xi(0)\prod_{\alpha}\left(1-\frac{t^2}{\alpha^2}\right)$$

pero $t^2 = \left(-i\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)^2 = -\left(s-\frac{1}{2}\right)^2$. Sustituyendo esto en la fórmula del producto y escribiendo la definición original de $\xi(t)$ obtenemos:

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(0)\prod_{\alpha}\left(1+\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{\alpha^2}\right).$$

Al sacar el logaritmo de ambos lados Riemann obtiene la fórmula (que enuncia en la ecuación A.32):

$$\log\zeta(s) = \frac{s}{2}\log\pi + \log\xi(0) - \log(s-1) - \log\Pi\left(\frac{s}{2}\right) + \sum_{\alpha}\log\left(1+\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{\alpha^2}\right). \tag{2.6.3}$$

Aquí surge la primera ambigüedad entre usar la variable t con ceros α o usar la variable s con ceros ρ. Después es claro que Riemann se regresa a usar s para simplificar la expresión que obtiene para $J(x)$ al sustituir lo anterior en 2.6.2. La forma en que Riemann se regresa a la variable s es muy sutil y cuando lleguemos a ese punto lo mencionaremos con más calma.

El problema con usar la variable t aquí es que al tomar logaritmos, el término de la suma sobre los ceros de $\xi(t)$ tiene un término cuadrático dentro del logaritmo, y éste *no* coincide con los términos lineales que aparecen en el logaritmo de la fórmula del producto para la función factorial:

$$\begin{aligned}\Pi\left(\frac{s}{2}\right) &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{2n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{s}{2}}\\ \log\Pi\left(\frac{s}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log\left(1+\frac{s}{2n}\right).\end{aligned}$$

Esto va a complicar bastante las cuentas, entonces lo que hace Riemann implícitamente (nunca menciona que regresa a la variable s) es reescribir la fórmula del producto para $\xi(t)$ en términos de la variable s. En la sección pasada argumentamos porqué $\xi(t)$ se podía escribir como un producto que dependía de sus ceros. Ahora si nunca hubiéramos hecho el cambio $s = \frac{1}{2} + it$ y hubiéramos definido directamente

$$\xi(s) = \Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

como función de s, entonces podríamos escribir con exactamente los mismos argumentos que en la sección anterior,

$$\xi(s) = \xi(0)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)$$

donde ρ son los ceros de $\xi(s)$ en la variable s. Los argumentos son los mismos porque el cambio de variable $s = \frac{1}{2} + it$ es un cambio lineal, entonces cualquier argumento que dependa del orden de s es el mismo que se usa para hablar del orden de t. Ahora la función $\xi(s)$ es distinta de la función $\xi(t)$, entonces por el momento la nombraremos distinto $\xi(s) := \Xi(s)$ donde:

$$\begin{aligned}\Xi(s) &= \xi(t) = \Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\\ \Xi\left(\frac{1}{2}+it\right) &= \xi(t)\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$$\Xi(s) = \Xi\left(0\right) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$$

y así 2.6.3 nos queda

$$\log \zeta(s) = \frac{s}{2} \log \pi + \log \Xi\left(0\right) - \log(s-1) - \log \Pi\left(\frac{s}{2}\right) + \sum_{\rho} \log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right). \tag{2.6.4}$$

Ahora, la constante $\Xi\left(0\right)$ se puede evaluar como

$$\Xi\left(0\right) = \Pi\left(\frac{0}{2}\right)\left(0-1\right)\pi^{-\frac{0}{2}}\zeta\left(0\right) = -\zeta\left(0\right),$$

donde ya habíamos evaluado $\zeta\left(0\right)$ al final de la sección 2.2. Por lo tanto $\Xi\left(0\right) = \frac{1}{2}$. Ahora, para la función $\xi\left(t\right)$, su valor en 0 es

$$\xi\left(0\right) = \Pi\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - 1\right)\pi^{-\frac{1}{4}}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$$

que es bastante más complicado que $\Xi\left(0\right)$.

Esto puede explicar porqué Riemann nunca evalúa $\xi\left(0\right)$ explícitamente. De hecho, cuando escribe $\log \xi\left(0\right)$ en A.32, por su notación anterior se refiere a $\log \xi\left(t=0\right) = \log \Xi\left(\frac{1}{2}\right)$, entonces en realidad Riemann tiene un error pequeño en su fórmula. Después en el artículo él hace el cambio implícito de $\xi\left(t\right)$ a $\Xi(s)$, por lo tanto es posible que se refeririera a $\log \Xi\left(0\right)$ en lugar de $\log \xi\left(0\right)$. De igual forma, este error no altera en lo más mínimo el artículo.

Con su fórmula para $\log \zeta(s)$, Riemann sustituye esa expresión en la de $J(x)$ 2.6.2 [13, línea 80], pero afirma que la integral resultante no se puede separar en suma [13, líneas 81-82]. Esto se verifica fácilmente al observar que si se pudiera separar la integral, uno de los sumandos sería la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{2} \log \pi ds$$

que claramente no converge pues es igual a $\frac{1}{2} \log \pi$ por la longitud del intervalo de integración que es infinito.

Entonces para poder sustituir la expresión $\log \zeta(s)$ en 2.6.2 y después separar la integral en una suma de integrales sobre los términos individuales de 2.6.4, es "...appropriate to convert the previous equation by means of integration by parts." [13, líneas 82-83]

Riemann integra 2.6.2 por partes con el cambio de variable $u = s^{-1} \log \zeta(s)$ y $dv = x^s ds$. Esto da $du = \frac{d}{ds}\left\{s^{-1} \log \zeta(s)\right\} ds$ y $v = \frac{1}{\log x} x^s$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{\log \zeta(s)}{s \log x} x^s\right]_{a-i\infty}^{a+i\infty} - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{\log x} \frac{d}{ds}\left\{\frac{\log \zeta(s)}{s}\right\} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x}\left[\frac{\log \zeta(s)}{s} x^s\right]_{a-i\infty}^{a+i\infty} - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds}\left\{\frac{\log \zeta(s)}{s}\right\} x^s ds \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

donde

$$\begin{aligned} \left|\log \zeta\left(a \pm ib\right)\right| &= \left|\sum_n \frac{1}{n^{a \pm ib}}\right| \leq \sum_n \left|n^{-(a \pm ib)}\right| = \sum_n \left|n^{-a}\right| \left|n^{\mp ib}\right| \\ &\leq \sum_n n^{-a} \left|e^{\mp ib \log n}\right| = \sum_n n^{-a} \\ &\leq \zeta\left(a\right) < \infty \end{aligned}$$

pues $a > 1$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty}\left|\frac{\log\zeta(a\pm ib)}{a\pm ib}x^{a\pm ib}\right| &= \lim_{b\to\infty}\frac{|\log\zeta(a\pm ib)|}{|a\pm ib|}\left|e^{(a\pm ib)\log x}\right| \\
&\leq \lim_{b\to\infty}\frac{\log\zeta(a)}{|a\pm ib|}e^{a\log x}\left|e^{\pm ib\log x}\right| \\
&\leq \log\zeta(a)\,x^a\lim_{b\to\infty}\frac{1}{|a\pm ib|}=0
\end{aligned}$$

y así el primer término de 2.6.5 se hace cero y Riemann obtiene la expresión para $J(x)$:

$$J(x) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{\log\zeta(s)}{s}\right\}x^s ds$$

que escribe en la ecuación A.33.

Ahora sustituimos la expresión 2.6.4 en esta última expresión y obtenemos

$$\begin{aligned}
J(x) &= -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left(\frac{d}{ds}\left\{\frac{s\log\pi}{2s}\right\}+\frac{d}{ds}\left\{\frac{\log\Xi(0)}{s}\right\}-\frac{d}{ds}\left\{\frac{\log(s-1)}{s}\right\}\right. \\
&\quad \left.-\frac{d}{ds}\left\{\frac{\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right)}{s}\right\}+\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\sum_\rho\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\right\}\right)x^s ds \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{\log\Xi(0)}{s}\right\}x^s ds \\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\log(s-1)\right\}x^s ds \\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right)\right\}x^s ds \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\sum_\rho\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\right\}x^s ds. \qquad (2.6.6)
\end{aligned}$$

Podemos evaluar una integral casi inmediatamente. La primera integral de las cuatro se puede reescribir mediante integración por partes con los cambios de variables $u = x^s$ y $dv = \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\right\}ds$ junto con $du = x^s\log x ds$ y $v = s^{-1}$:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{\log\Xi(0)}{s}\right\}x^s ds \qquad (2.6.7)\\
&= -\log\Xi(0)\left(\left[\frac{x^s}{2\pi is\log x}\right]_{a-i\infty}^{a+i\infty}-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{1}{s}x^s ds\right) \qquad (2.6.8)
\end{aligned}$$

donde

$$\lim_{\mathrm{Im}(s)\to\pm\infty}\left|\frac{x^s}{2\pi is\log x}\right| = \frac{x^a}{2\pi\log x}\lim_{\mathrm{Im}(s)\to\pm\infty}\left|\frac{1}{s}\right| = 0.$$

Por lo tanto la primera integral queda como

$$\frac{\log\Xi(0)}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{1}{s}x^s ds,$$

pero esta fórmula es idéntica a la fórmula 1.4.8 de la sección 1.4 con $\beta = 0$. Por lo tanto la integral, junto con el factor $1/2\pi i$, vale $x^0 = 1$ y la cuarta integral se reduce al valor:

$$\log\Xi(0) = \log\frac{1}{2} = -\log 2.$$

Con esto obtenemos

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\log(s-1)\right\}x^s ds \\ &\quad -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\sum_{\rho}\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\right\}x^s ds \\ &\quad +\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right)\right\}x^s ds - \log 2. \end{aligned} \tag{2.6.9}$$

Aquí vale la pena dar un paso atrás y ver qué es lo que obtuvo Riemann. Es claro que la igualdad anterior nos da una expresión para $J(x)$ y, en cierto aspecto, ya terminó Riemann con el propósito que tenía en el artículo. Pero la expresión es muy complicada y nada fácil de manejar, entonces el siguiente paso lógico es encontrar valores para esas integrales.

A primera vista las cuatro integrales se ven muy distintas y sugiere que hay que evaluarlas por separado. Es posible hacerlo a la manera de Edwards en su primer capítulo [4], pero después de haber evaluado una a una las integrales se vuelve claro que hay una forma unificada de hacerlo. De hecho Riemann *no* evalúa las integrales (salvo la primera que sí es fácil de hacerlo) explícitamente, y el método que usa para encontrar el valor de ellas es elegantemente sencillo:

En lugar de evaluar las integrales con el Teorema del Residuo o algo similar, Riemann representa las últimas tres integrales con una sola expresión. Después deriva esa expresión general para poder encontrar una antiderivada y así esta antiderivada coincide (salvo en una constante) con la expresión general. Esa antiderivada es sorprendentemente sencilla y permite analizar cómo se comporta $J(x)$.

Este método que propone Riemann, entre las líneas 84 y 100, sí se puede complicar en algunos pasos y hay dos momentos que *no* están justificados en el artículo y que sí necesitan justificación, pero en general el método de Riemann para deducir la fórmula para $J(x)$ es más elegante, y aunque tiene sus errores, parece que es más ilustrativo que otros métodos como el que aparece en el libro de Edwards.

Para poder expresar las tres integrales de 2.6.9 con una sóla expresión, cada integral se tiene que reescribir pues a primera vista no son similares. La primera integral con la que trabaja Riemann es donde aparece el término $\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right)$. Él expresa $\Pi\left(\frac{s}{2}\right)$ como su fórmula de producto [13, ecuación A.34] para obtener el integrando:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right)\right\}x^s &= \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)\right\}x^s \\ &= \frac{d}{ds}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)\right\}x^s. \end{aligned}$$

Riemann luego justifica [13, líneas 84-85] que la derivada se puede intercambiar con la suma para obtener la ecuación A.35:

$$\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right)\right\}x^s = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)\right\}x^s$$

ya que el primer sumando de la serie no depende de s y desaparece al derivar.

Para demostrar formalmente que sí se puede hacer este intercambio de derivada y suma, tenemos que ver que la serie (sin las derivadas) define una función analítica de s sobre la recta $\mathrm{Re}(s) = a > 1$. Pero esto es posible de la definición de $\Pi\left(\frac{s}{2}\right)$, porque la serie representa la función $\frac{1}{s}\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right)$ que es una función analítica en todo el plano, salvo el 0 y los puntos $s = -2n$ donde $\Pi\left(\frac{s}{2}\right)$ tiene polos. Aparte, como $\Pi\left(\frac{s}{2}\right)$ nunca se anula, la función $\frac{1}{s}\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right)$ no tiene singularidades logarítmicas. Por lo tanto la serie representa una función analítica[9] en la recta $\mathrm{Re}(s) = a > 1$ y así se puede derivar término a término.

Ahora, como la serie define una función analítica en la recta $\mathrm{Re}(s)$, la serie de derivadas también define

[9]En el teorema 2 demostramos que el producto infinito convergía absolutamente en todo el plano complejo salvo en los enteros negativos.

una función analítica y así se puede intercambiar con la integral sobre la recta $\mathrm{Re}(s) = a$, es decir:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right)\right\}x^s ds \\
&= \quad -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)\right\}x^s ds \\
&= \quad -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)\right\}x^s ds.
\end{aligned}$$

Formalmente se tendría que tomar la integral de $a - iT$ hasta $a + iT$ donde sí se puede intercambiar la serie con la integral y luego tomar el límite cuando $T \to \infty$. Aquí obtuvimos una expresión muy cercana a la primera integral de 2.6.9.

Con estos arguments, Riemann lanza directamente su expresión general para las tres integrales [13, líneas 86-87 y ecuación A.37]:

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)}{s}\right\}x^s ds \tag{2.6.10}$$

donde β varía para tomar el valor de alguna de las tres integrales de 2.6.9. Pero antes de pasar a esta expresión, trabajaremos un poco más las otras dos integrales que nos faltan.

Para llevar la segunda integral de 2.6.9 –la integral que depende de los ceros ρ no triviales de $\zeta(s)$– a la forma 2.6.10, necesitamos intercambiar la suma con la derivada y después con la integral:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\sum_{\rho}\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\right\}x^s ds \\
&= \quad -\sum_{\rho}\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\right\}x^s ds. \qquad (2.6.11)
\end{aligned}$$

Con esto obtenemos una serie donde los sumandos tienen la forma que mencionaba Riemann, donde β toma como valores los ceros no triviales de $\zeta(s)$. Este intercambio de suma y derivada e integral es muy complicado justificar, y aquí es el segundo momento donde en el artículo se deja sin resolver una parte importante de una demostración (la primera es cuando le falta justificar que los ceros no triviales de $\zeta(s)$ tienen parte real distinta de uno). No es nada claro que la serie que corre sobre los ceros no triviales de $\zeta(s)$ pueda intercambiarse con la derivada porque la serie es condicionalmente convergente.

Ahora, sólo nos falta ver que la primera integral de 2.6.9 tiene la forma que propone Riemann. A primera vista sólo varían por un signo si hacemos $\beta = 1$ en 2.6.10, pero hay un problema si hacemos $\beta = 1$. Para ver esto, definimos, para $x > 1$ fijo,

$$f(\beta) := \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right\}x^s ds$$

y observemos que, como función de β, $f(\beta)$ está bien definida siempre y cuando la expresión

$$\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right) = \log(\beta - s) - \log\beta$$

esté bien definida.

Tomamos la rama del logaritmo que obtenemos al quitarle al plano complejo las β's que son reales no negativos. Para ver que el término $\log(\beta - s)$ está bien definido, simplemente tomamos $\mathrm{Re}(s) = a > \mathrm{Re}(\beta)$. Como la integral sobre la recta $\mathrm{Re}(s) = a$ *no* depende del valor de a siempre y cuando $a > 1$, para todo β, podemos escoger $a > \mathrm{Re}(\beta)$ y definir bien $f(\beta)$ como la integral sobre la recta $\mathrm{Re}(s) = a$. Al hacer $a > \mathrm{Re}(\beta)$ tenemos que $\mathrm{Re}(\beta - s) = \mathrm{Re}(\beta) - a < 0$, entonces no es posible que $\beta - s$ sea un real no-negativo.

Por lo tanto *no* podemos evaluar en $\beta = 1$. Entonces generalizamos la forma que tiene la primera integral a la función

$$\hat{f}(\beta) := \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\log\left(\frac{s}{\beta}-1\right)\right\}x^s ds,$$

que está bien definida en los complejos salvo los reales no-positivos por exactamente la misma razón que $f(\beta)$ está definida para los complejos salvo los reales no-negativos. Observemos también que la integral que queremos evaluar –la primera integral de 2.6.9– es en realidad $\hat{f}(1)$.

Ahora veamos realmente en qué difieren la función $\hat{f}(\beta)$ y la forma general $f(\beta)$ que propone Riemann:

$$\begin{aligned}
f(\beta) - \hat{f}(\beta) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)-\frac{1}{s}\log\left(\frac{s}{\beta}-1\right)\right\}x^s ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{\log(\beta)-\log(-\beta)}{s}\right\}x^s ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{\log(-1)}{s}\right\}x^s ds.
\end{aligned} \tag{2.6.12}$$

Esta última integral tiene exactamente la misma forma que la primera integral que evaluamos en 2.6.7. Por lo tanto la integral anterior es la constante $-\log(-1)$. Aquí hay que tener cuidado con la constante $\log(-1)$ y qué valor va a tomar pues el logaritmo es una función multivaluada.

La diferencia $f(\beta) - \hat{f}(\beta)$ está bien definida en la intersección de los dominios, i.e. $\mathbb{C} - \mathbb{R}$, entonces si nos fijamos sólo en el semiplano superior, β tiene un argumento positivo: $0 < \arg\beta < \pi$. Por lo tanto $\log\beta - \log(-\beta)$ tiende a $\log(-1)$ pero con argumento positivo, es decir $\log(-1) = i\pi$. Con esto concluimos que en el semiplano superior tenemos:

$$f(\beta) - \hat{f}(\beta) = i\pi. \qquad (\mathrm{Im}(\beta) > 0) \tag{2.6.13}$$

Por el momento dejamos esto aquí porque nos faltan más resultados que veremos más adelante.

Ya hemos llevado todas las integrales a la forma general que propone Riemann [13, ecuación A.37] y que nosotros llamamos $f(\beta)$ salvo la primera que vale $\hat{f}(1)$. Con esto obtenemos

$$J(x) = \hat{f}(1) - \sum_{\rho} f(\rho) - \sum_{n=1}^{\infty} f(-2n) - \log 2,$$

pero la serie que depende de los ceros no triviales de $\zeta(s)$ se debe escribir apareando cada cero ρ con su pareja $1-\rho$ y sumar en orden de parte imaginaria ascendente. Entonces obtenemos:

$$J(x) = \hat{f}(1) - \sum_{\mathrm{Im}(\rho)>0}\left(f(\rho) + f(1-\rho)\right) - \sum_{n=1}^{\infty} f(-2n) - \log 2. \tag{2.6.14}$$

Este es el resultado escrito de lo que dice Riemann cuando indica que todas las integrales en la primera expresión para $J(x)$ tienen la forma de $f(\beta)$ [13, líneas 86-87 y ecuación A.37].

Ahora, lo que sigue en el artículo es encontrar valores para $f(\beta)$ de $\beta = \rho$, $\beta = 1-\rho$ y $\beta = -2n$. Estos valores para β caen en dos semiplanos distintos: $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ y $\mathrm{Re}(\beta) < 0$ y es en estos dos semiplanos, por separado, donde Riemann encuentra otra expresión para $f(\beta)$. Cabe mencionar que si un cero ρ tiene parte real $\mathrm{Re}(\rho) = 0$, entonces *no* podemos separar el dominio en los semiplanos mencionados, pero supongamos el resultado de Hadamard [9] y de la Vallée Poussin [3] que la parte real de los ceros no triviales de $\zeta(s)$ tienen parte real $\mathrm{Re}(s) \neq 0$.

Desde aquí el método de Riemann es simplemente encontrar otra función que coincida con $f(\beta)$ en estos semiplanos distintos. Para hacer esto deriva f y busca una función cuya derivada es la misma que f'. Esto nos va a dar una función nueva que difiere de f en posiblemente una constante.

Antes de derivar $f(\beta)$, Riemann observa que [13, ecuación A.38]:

$$\frac{d}{d\beta}\left\{\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right\} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1-\frac{s}{\beta}}\cdot\frac{s}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2 - s\beta} = \frac{1}{(\beta - s)\beta}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} f'(\beta) &= \frac{d}{d\beta}\left\{\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right\}x^s ds\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{d\beta}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right\}x^s ds. \end{aligned}$$

Ahora, como la función $s^{-1}(\log(s-\beta)-\log(\beta))$ es analítica en el dominio de $f(\beta)$, podemos intercambiar el orden de derivación[10], y así tenemos

$$\begin{aligned} f'(\beta) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\frac{d}{d\beta}\left\{\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right\}x^s ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{(\beta-s)\beta}\right\}x^s ds. \end{aligned}$$

Ahora hacemos el cambio de variable $u = x^s$ y $dv = \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{(\beta-s)\beta}\right\}ds$ con $du = x^s\log x ds$ y $v = ((\beta-s)\beta)^{-1}$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} f'(\beta) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\left[\frac{x^s}{(\beta-s)\beta}\right]_{a-i\infty}^{a+i\infty} - \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^s}{(\beta-s)\beta}\log x ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\left[\frac{x^s}{(\beta-s)\beta}\right]_{a-i\infty}^{a+i\infty} - \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^s}{(\beta-s)\beta}ds \end{aligned}$$

donde

$$\left|\frac{x^s}{(\beta-s)\beta}\right| = \frac{x^a}{|(\beta-s)\beta|}$$

y así

$$\lim_{b\to\pm\infty}\left|\frac{x^s}{(\beta-s)\beta}\right| = 0,$$

porque el denominador diverge a infinito y el numerador está acotado (recordemos que $s = a+ib$). Entonces el primer término de $f'(\beta)$ se hace cero y así tenemos que

$$f'(\beta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^s}{(\beta-s)\beta}ds = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\beta}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^s}{s-\beta}ds. \tag{2.6.15}$$

Observemos que esta ecuación es exactamente la fórmula 1.4.8 al final de la sección 1.4. Por lo tanto, como $x > 1$, la integral vale x^β. Con esto deducimos que

$$f'(\beta) = \frac{1}{\beta}x^\beta.$$

La fórmula anterior es válida siempre y cuando la fórmula 1.4.8 de la sección 1.4 sea válida, i.e. cuando $\mathrm{Re}(\beta) < a$, pero ya habíamos visto que las integrales sobre la recta vertical $\mathrm{Re}(s) = a$ de esta sección *no* dependen de a, entonces podemos escoger a tal que $\mathrm{Re}(\beta) < a$ para cada β. Entonces la ecuación anterior es válida para cada β en el dominio de f.

Como Riemann quiere expresiones distintas para los semiplanos $\mathrm{Re}(\beta) < 0$ y $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, reescribe la expresión anterior como la integral elemental

$$f'(\beta) = -\int_x^\infty t^{\beta-1}dt,$$

con $\mathrm{Re}(\beta) < 0$, para que cerca del ∞, la antiderivada $\frac{1}{\beta}t^\beta$ se haga cero [13, línea 89 y ecuación A.39]. Para el caso $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, usa la integral

$$f'(\beta) = \int_0^1 t^{\beta-1}dt.$$

[10]Para funciones f de clase C^1 en su dominio se tiene que $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f = \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f$

Ahora, la idea es encontrar una función cuya derivada sea estas integrales, pero ya habíamos visto en la sección 1.5 que la integral logarítmica generalizada tiene como derivada a $\frac{1}{\beta}x^{\beta}$. Observemos que la función

$$\mathrm{Li}\left(x^{\beta}\right) = i\pi + \int_{C^+} \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz$$

sólo nos sirve para el caso $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, pues era para estos valores donde $\mathrm{Li}\left(x^{\beta}\right)$ estaba bien definido. Entonces para $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ tenemos que $f'(\beta) = \mathrm{Li}'\left(x^{\beta}\right)$ y así difieren en una constante Q:

$$f(\beta) = \mathrm{Li}\left(x^{\beta}\right) + Q.$$

Para el caso $\mathrm{Re}(\beta) < 0$, es necesario proponer otra integral, pero ya conocemos una antiderivada para el caso $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ entonces es fácil proponer una antiderivada para el caso $\mathrm{Re}(\beta) < 0$. En lugar de integrar $z^{\beta-1}/\log z$ de $z = 0$ a $z = x$ en el caso de $\mathrm{Li}\left(x^{\beta}\right)$, integramos de $z = x$ a ∞ y obtenemos

$$f(\beta) = -\int_x^{\infty} \frac{t^{\beta-1}}{\log t} dt + P,$$

donde P es una constante. Verificar que efectivamente la derivada de la integral anterior coincide con f' en el semiplano $\mathrm{Re}(\beta) < 0$, es idéntico a ver que la derivada de $\mathrm{Li}\left(x^{\beta}\right)$ coincide con f' en el semiplano $\mathrm{Re}(\beta) > 0$.

Con esto llegamos a las fórmulas A.42 y A.43, respectivamente, que enuncia Riemann [13, línea 91]:

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \int_0^x \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz + Q \qquad \mathrm{Re}(\beta) > 0 \\ f(\beta) &= -\int_x^{\infty} \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz + P \qquad \mathrm{Re}(\beta) < 0 \end{aligned} \tag{2.6.16}$$

donde la primera integral se toma sobre el contorno C^+ o C^- como en la definición de $\mathrm{Li}\left(x^{\beta}\right)$. Es importante no especificar aún el contorno, porque el valor de la constante cambia por $2\pi i$ según que contorno que tomemos. Esto es justo lo que dice Riemann cuando menciona que "... the integral from 0 to x takes on values separated by $2\pi i$, depending on wether the integration is taken through complex values with positive or negative argument..."[11] [13, líneas 96-97].

Aquí Riemann está mencionando implícitamente que es necesario evadir el punto singular $z = 1$ y que hay dos formas de hacerlo: por arriba con el contorno C^+ ("positive argument") o por abajo con el contorno C^- ("negative argument"). Observemos que para $\hat{f}$, se tiene la misma fórmula para el semiplano $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ sólo que la constante es distinta; la nombraremos Q'.

Lo que falta ahora es encontrar el valor de las constantes y esto es el propósito del párrafo que procede las igualdades anteriores [13, líneas 95-100]. En el caso $\mathrm{Re}(\beta) < 0$, la constante de integración P la evalúa Riemann al hacer $\mathrm{Re}(\beta) \to -\infty$ [13, líneas 95-96]. Para facilitar el cálculo, escribimos $\beta = \sigma + i\tau$ donde σ y τ son las partes reales e imaginarias de β respectivamente. Entonces Riemann propone hacer

$$\lim_{\sigma \to -\infty} f(\beta) = P - \lim_{\sigma \to -\infty} \int_x^{\infty} \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz.$$

Para ver qué sucede con la integral cuando $\sigma \to -\infty$ observemos que

$$\left| \int_x^{\infty} \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz \right| \leq \int_x^{\infty} \left| \frac{z^{\beta-1}}{\log z} \right| dz = \int_x^{\infty} \frac{z^{\sigma-1}}{\log z} dz$$

pues z es un real mayor que $x > 1$. Ahora observemos que si escribimos $\sigma = -n$ y hacemos $n \to \infty$, entonces tenemos que

$$\frac{z^{-n-1}}{\log z} \geq \frac{z^{-n-2}}{\log z} \iff \frac{1}{z} \geq \frac{1}{z^2}$$

y así podemos aplicar el Teorema de convergencia monótona a la sucesión de funciones

$$\{f_N(z)\} = \left\{ -\frac{z^{-N-1}}{\log z} \right\},$$

[11] Para ver que efectivamente la diferencia es $2\pi i$ véase la sección 1.5

notemos que hemos puesto el signo menos para que se cumpla la hipótesis de $f_N \leq f_{N+1}$. Por lo tanto tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} -\int_x^\infty -\frac{z^{-n-1}}{\log z}dz = -\int_x^\infty \lim_{n\to\infty} -\frac{z^{-n-1}}{\log z}dz = 0$$

pues $z^{-n-1} \to 0$ cuando $n \to \infty$, porque $z > 1$. Por lo tanto, como el integrando es una función continua de n, podemos deducir que la integral se hace cero cuando $\sigma \to -\infty$. Entonces obtenemos

$$\lim_{\sigma\to-\infty} f(\beta) = P.$$

Para evaluar este límite, primero generalizamos al caso cuando $\sigma \to \pm\infty$ y observemos que

$$\begin{aligned}
f(\beta) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right\} x^s ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{s^2}\left(s\frac{d}{ds}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right) - \log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right) x^s ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\frac{1}{s(s-\beta)} - \frac{1}{s^2}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right) x^s ds
\end{aligned}$$

y como

$$\frac{1}{\beta(s-\beta)} - \frac{1}{\beta s} = \frac{\beta s - \beta s + \beta^2}{\beta^2 s(s-\beta)} = \frac{1}{s(s-\beta)},$$

obtenemos

$$f(\beta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{\beta(s-\beta)} - \frac{x^s}{\beta s} - \frac{1}{s^2}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right) x^s ds.$$

Esta integral la podemos descomponer en tres integrales. Las primeras se pueden evaluar usando la fórmula 1.4.8, que ya hemos usado antes, al final de la sección 1.4:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{\beta(s-\beta)}ds &= \frac{x^\beta}{\beta\log x} \\
\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{\beta s}ds &= \frac{x^0}{\beta\log x}.
\end{aligned}$$

Con estas dos igualdades obtenemos otra fórmula para $f(\beta)$

$$f(\beta) = \frac{x^\beta}{\beta\log x} - \frac{1}{\beta\log x} - \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{s^2}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right) x^s ds$$

que podemos acotar con

$$\begin{aligned}
|f(\beta)| &\leq \left|\frac{x^\beta}{\beta\log x}\right| + \left|\frac{1}{\beta\log x}\right| + \left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{s^2}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right) x^s ds\right| \\
&\leq \frac{x^\sigma}{|\beta|\log x} + \frac{1}{|\beta|\log x} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left|\frac{1}{s^2}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right) x^s\right| ds.
\end{aligned}$$

Si volvemos a escribir $\beta = \sigma + i\tau$ y si hacemos $\sigma \to -\infty$, los primeros dos términos claramente se hacen cero y si se pudiera meter el límite a la integral tendríamos que

$$\lim_{\sigma\to-\infty}\left|\frac{1}{s^2}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)x^s\right| = \left|\frac{1}{s^2}\log\left(\lim_{\sigma\to\infty} 1-\frac{s}{\beta}\right)x^s\right| = \left|\frac{1}{s^2}\log(1)\, x^s\right| = 0,$$

e implicaría que $f(\beta) \to 0$ cuando $\sigma \to -\infty$. De hecho sólo necesitamos que $|\beta| \to \infty$ para afirmar que $f(\beta) \to 0$. Esto es un resultado que usaremos más adelante:

$$\lim_{|\beta|\to\infty} f(\beta) = 0. \tag{2.6.17}$$

Lo último que nos falta ver para verificar el límite anterior es ver que se puede intercambiar el límite con la integral:

$$\lim_{|\beta|\to\infty}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{1}{s^2}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)x^s ds=\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\lim_{|\beta|\to\infty}\frac{1}{s^2}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)x^s ds,$$

pero el orden del integrando (del lado izquierdo) es $|\beta|^{-2}$ porque aparece un término s^{-2} y el término x^s no afecta el orden porque la parte real de s es fija. Entonces la integral converge absolutamente y el intercambio es justificado.

Ya hemos verificado 2.6.17 y podemos afirmar que

$$0=\lim_{\sigma\to-\infty}f(\beta)=P$$

y así, de 2.6.16, obtenemos una fórmula para $f(\beta)$ en el semiplano $\mathrm{Re}(\beta)<0$:

$$f(\beta)=-\int_x^\infty\frac{z^{\beta-1}}{\log z}dz \qquad \mathrm{Re}(\beta)<0.$$

Ahora nos falta evaluar la constante Q que aparece en

$$f(\beta)=\int_0^x\frac{z^{\beta-1}}{\log z}dz+Q=\mathrm{Li}(x^\beta)+Q$$

para el semiplano $\mathrm{Re}(\beta)>0$.

Riemann dice que, para evaluar Q, tenemos que hacer procesos límites distintos si integramos sobre C^+ o C^- (para poder evaluar el término $\mathrm{Li}(x^\beta)$). En el caso de integrar sobre C^+, Riemann dice que "... [the constant of integration] becomes infinitely small, for the former path, when the coeficient of i in the value of β becomes infinitely positive...", es decir que hay que hacer que la parte imaginaria de β tienda a $+\infty$ [13, líneas 97-98].

En el otro caso, Riemann dice que hay que hacer la parte imaginaria de β tender a $-\infty$ para que $Q=0$ (Q es la constante de integración a la que alude Riemann) [13, línea 99].

Si volvemos a escribir $\beta=\sigma+i\tau$, al integrar sobre C^+, Riemann dice que hay que hacer $\tau\to\infty$ y al integrar sobre C^-, hay que hacer $\tau\to-\infty$. En ambos casos $|\beta|\to\infty$ y así tenemos, por 2.6.17,

$$\lim_{\tau\to\infty}f(\beta)=\lim_{\tau\to-\infty}f(\beta)=0$$

de lo cual se deduce que

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\to\infty}\int_{C^+}\frac{z^{\beta-1}}{\log z}dz &= -Q\\ \lim_{\tau\to\infty}\int_{C^-}\frac{z^{\beta-1}}{\log z}dz &= -Q.\end{aligned}$$

A priori, las dos Q's pueden ser distintas, pero las denotamos igual porque en el artículo Riemann menciona implícitamente que son iguales.

Para el primer límite hacemos el cambio de variable $\log z=w$ con $z^{-1}dz=dw$ y tenemos

$$\int_{C^+}\frac{z^{\beta-1}}{\log z}dz=\int_{\log[C^+]}\frac{e^{\beta w}}{w}dw$$

donde $\log[C^+]$ significa aplicarle el logaritmo al contorno C^+. Si seccionamos C^+ en tres contornos: el eje real $[0,1-\varepsilon]$; el semicírculo en el semiplano superior $|z-1|=\varepsilon$ y el eje real $[1+\varepsilon,x]$, tenemos que la función logaritmo manda estos tres contornos al eje real $(-\infty,\log(1-\varepsilon)]$; al contorno $\log\left(1+\varepsilon e^{i\theta}\right)$ donde $\theta\in(0,\pi)$, y al eje real $[\log(1+\varepsilon),\log x]$. La imagen de C^+ bajo $logz$, junto con sus componentes se muestra en la figura 2.6.1.

Como $w^{-1}e^{\beta w}$ es analítico en el nuevo contorno $\log[C^+]$, entonces sólo depende de los extremos, entonces por el Teorema de Cauchy, si mantenemos iguales los extremos de $\log[C^+]$ y deformamos continuamente el contorno (sin cruzar la singularidad $w=0$), entonces no alteramos la integral.

Figura 2.6.1: Imagen de C^+ bajo $\log z$

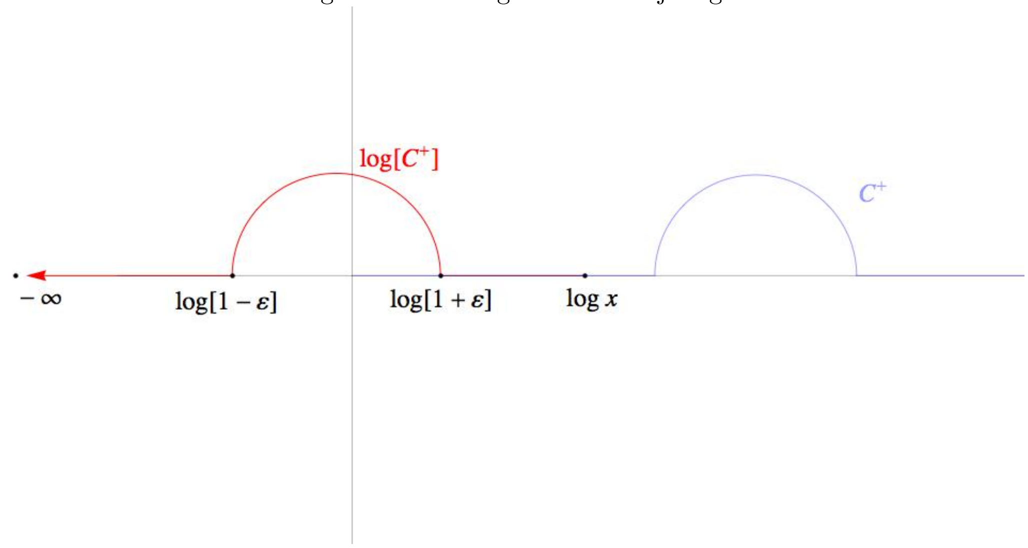
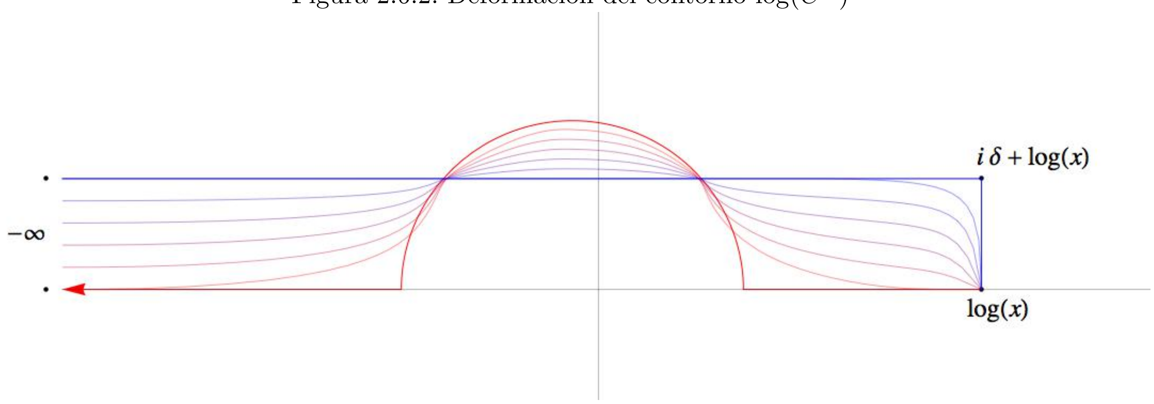


Figura 2.6.2: Deformación del contorno $\log(C^+)$



Ahora, los extremos de $\log[C^+]$ son $-\infty$ y $\log x$, entonces proponemos el nuevo contorno que va de $i\delta - \infty$ a $i\delta + \log x$ (una recta paralelo al eje real a distancia $\delta > 0$ de él y en el semiplano superior) y después va de $i\delta + \log x$ a $\log x$ que es una recta vertical. Este nuevo contorno se muestra en la figura 2.6.2.

Entonces tenemos que

$$\int_{C^+} \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz = \int_{i\delta-\infty}^{i\delta+\log x} \frac{e^{\beta w}}{w} dw + \int_{i\delta+\log x}^{\log x} \frac{e^{\beta w}}{w} dw.$$

Ahora hacemos el cambio de variable $w = i\delta + u$ con $dw = du$ en la primera integral y hacemos $w = \log x + iv$ con $dw = idv$ en la segunda integral y obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{C^+} \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz &= \int_{-\infty}^{\log x} \frac{e^{\beta u + i\beta\delta}}{i\delta + u} du + \int_{\delta}^{0} \frac{e^{\beta \log x + i\beta v}}{\log x + iv} idv \\ &= e^{i\beta\delta} \int_{-\infty}^{\log x} \frac{e^{\beta u}}{i\delta + u} du - ix^{\beta} \int_0^{\delta} \frac{e^{i\beta v}}{\log x + iv} dv.\end{aligned}$$

Sustituimos $\beta = \sigma + i\tau$ y hacemos $\tau \to \infty$:

$$\begin{aligned}\int_{C^+} \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz &= e^{i(\sigma+i\tau)\delta} \int_{-\infty}^{\log x} \frac{e^{(\sigma+i\tau)u}}{i\delta + u} du - ix^{\beta} \int_0^{\delta} \frac{e^{i(\sigma+i\tau)v}}{\log x + iv} dv \\ &= e^{-\tau\delta} e^{i\sigma\delta} \int_{-\infty}^{\log x} \frac{e^{\sigma u} e^{i\tau u}}{i\delta + u} du - ix^{\beta} \int_0^{\delta} \frac{e^{-\tau v} e^{i\sigma v}}{\log x + iv} dv.\end{aligned}$$

Recordemos que estamos en el semiplano $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, entonces $\sigma > 0$ y así

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau\to+\infty}\left|\int_{C^+}\frac{z^{\beta-1}}{\log z}dz\right| &= \lim_{\tau\to+\infty}\left|e^{-\tau\delta}e^{i\sigma\delta}\int_{-\infty}^{\log x}\frac{e^{\sigma u}e^{i\tau u}}{i\delta+u}du - ix^{\beta}\int_0^{\delta}\frac{e^{-\tau v}e^{i\sigma v}}{\log x+iv}dv\right| \\
&\leq \lim_{\tau\to+\infty}\left|e^{-\tau\delta}e^{i\sigma\delta}\int_{-\infty}^{\log x}\frac{e^{\sigma u}e^{i\tau u}}{i\delta+u}du\right| + \left|ix^{\beta}\int_0^{\delta}\frac{e^{-\tau v}e^{i\sigma v}}{\log x+iv}dv\right| \\
&\leq \lim_{\tau\to+\infty}\left|e^{-\tau\delta}\right|\left|e^{i\sigma\delta}\right|\int_{-\infty}^{\log x}\left|\frac{e^{\sigma u}e^{i\tau u}}{i\delta+u}\right|du + \left|ix^{\sigma+i\tau}\right|\int_0^{\delta}\left|\frac{e^{-\tau v}e^{i\sigma v}}{\log x+iv}\right|dv \\
&\leq \lim_{\tau\to+\infty}\left|e^{-\tau\delta}\right|\int_{-\infty}^{\log x}\frac{|e^{\sigma u}|}{|i\delta+u|}du + x^{\sigma}\int_0^{\delta}\frac{|e^{-\tau v}|}{|\log x+iv|}dv.
\end{aligned}$$

Como la integral

$$\int_{-\infty}^{\log x}\frac{e^{\sigma u}}{i\delta+u}du$$

es absolutamente convergente, porque $e^{\sigma u}$ domina $|i\delta+u|$ en el intervalo $u \in (-\infty, 0)$, entonces ésta es una constante M con respecto de τ. Por otro lado sabemos que

$$\int_0^{\delta}\frac{|e^{-\tau v}|}{|\log x+iv|}dv \leq \int_0^{\delta}\frac{|e^{-\tau v}|}{|\log x|}dv = \int_0^{\delta}\frac{e^{-\tau v}}{\log x}dv$$

porque $|\log x| \leq |\log x + iv|$ para toda $v \in [0, \delta]$ y también $x > 1$. Por lo tanto

$$\int_0^{\delta}\frac{|e^{-\tau v}|}{|\log x+iv|}dv \leq \frac{1}{\log x}\int_0^{\delta}e^{-\tau v}dv = \frac{1}{\log x}\left[\frac{1}{-\tau}e^{-\tau v}\right]_0^{\delta} = -\frac{e^{-\tau\delta}}{\tau\log x} + \frac{1}{\tau\log x},$$

y así

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau\to+\infty}\left|\int_{C^+}\frac{z^{\beta-1}}{\log z}dz\right| &\leq \lim_{\tau\to+\infty}\left|e^{-\tau\delta}\right|\int_{-\infty}^{\log x}\frac{|e^{\sigma u}|}{|i\delta+u|}du + x^{\sigma}\int_0^{\delta}\frac{|e^{-\tau v}|}{|\log x+iv|}dv \\
&\leq \lim_{\tau\to+\infty}\left|e^{-\tau\delta}\right|M + x^{\sigma}\left(-\frac{e^{-\tau\delta}}{\tau\log x} + \frac{1}{\tau\log x}\right) \\
&\leq M\lim_{\tau\to+\infty}\left|e^{-\tau\delta}\right| + x^{\sigma}\lim_{\tau\to+\infty}\left(-\frac{1}{\tau e^{\tau\delta}\log x} + \frac{1}{\tau\log x}\right) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $Q = 0$ en el caso de integrar sobre C^+.

Cuando integramos sobre C^-, la demostración es la misma salvo cuando deformamos continuamente el contorno $\log[C^-]$. En el caso de C^-, lo llevamos al conjugado del contorno que usamos en la demostración anterior. Todo sigue funcionando porque el signo de δ se cambia y para recompensar este cambio de signo, hacemos $\tau \to -\infty$ (véase la última desigualdad). Por lo tanto en el segundo caso obtenemos $Q = 0$ pero todavía hay una ambigüedad en la forma en que escribimos $f(\beta)$ en el semiplano $\mathrm{Re}(\beta) > 0$.

Para obtener que $Q = 0$, en el caso de integrar sobre C^+, hacíamos $\mathrm{Im}(\beta) \to +\infty$, entonces estamos en el semiplano superior, y cuando integrábamos sobre C^- estábamos en el semiplano inferior. Como $f(\beta)$ no está definido para los reales no-negativos, entonces el semiplano $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ está a su vez dividido en los dos planos mencionados anteriormente.

Por lo tanto la expresión para $f(\beta)$ se tiene que dar por separado: una para cada componente de su dominio:

$$\begin{aligned}
f(\beta) &= \int_{C^+}\frac{z^{\beta-1}}{\log z}dz \qquad \mathrm{Re}(\beta), \mathrm{Im}(\beta) > 0 \\
f(\beta) &= \int_{C^-}\frac{z^{\beta-1}}{\log z}dz \qquad \mathrm{Im}(\beta) < 0 < \mathrm{Re}(\beta).
\end{aligned}$$

Como las integrales sobre C^+ y C^- extendían la integral logarítmica, usamos las fórmulas 1.5.3 de la sección 1.5 para escribir nuestra caracterización final de $f(\beta)$:

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \operatorname{Li}\left(x^\beta\right) - i\pi \qquad \operatorname{Re}(\beta), \operatorname{Im}(\beta) > 0 \\ f(\beta) &= \operatorname{Li}\left(x^\beta\right) + i\pi \qquad \operatorname{Im}(\beta) < 0 < \operatorname{Re}(\beta) \\ f(\beta) &= -\int_x^\infty \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz \qquad \operatorname{Re}(\beta) < 0. \end{aligned}$$

Ahora regresamos al caso de evaluar la primera integral $\hat{f}(1)$. Sabemos que difiere de la integral sobre C^+ por una constante Q', es decir:

$$\hat{f}(\beta) = \int_{C^+} \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz + Q' \qquad \operatorname{Re}(\beta) > 0.$$

Si hacemos $\operatorname{Im}(\beta) \to \infty$, obtenemos –con los resultados anteriores– que:

$$\lim_{\operatorname{Im}(\beta)\to\infty} \hat{f}(\beta) = Q',$$

pero hacer ese límite nos lleva al cuadrante $\operatorname{Re}(\beta), \operatorname{Im}(\beta) > 0$ donde la fórmula 2.6.13 nos dice que $f(\beta) - \hat{f}(\beta) = i\pi$, es decir que $\hat{f}(\beta) = f(\beta) - i\pi$. Si metemos esta igualdad en el límite anterior, entonces tenemos que $Q' = -i\pi$. Por lo tanto

$$5\hat{f}(\beta) = \int_{C^+} \frac{z^{\beta-1}}{\log z} dz - i\pi = \operatorname{Li}\left(x^\beta\right) \qquad \operatorname{Re}(\beta) > 0.$$

Aquí sí podemos evaluar en $\beta = 1$ para obtener el valor de la primera integral.

Con estas fórmulas ya podemos evaluar $J(x)$. Sustiuimos los valores particulares de β en la fórmula que ya teníamos para $J(x)$:

$$J(x) = \hat{f}(1) - \sum_{\operatorname{Im}(\rho)>0} \left(f(\rho) + f(1-\rho)\right) - \sum_{n=1}^{\infty} f(-2n) - \log 2,$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} J(x) &= \operatorname{Li}(x) - \sum_{\operatorname{Im}(\rho)>0} \left(\operatorname{Li}(x^\rho) - i\pi + \operatorname{Li}\left(x^{1-\rho}\right) + i\pi\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_x^\infty \frac{z^{-2n-1}}{\log z} dz - \log 2 \\ &= \operatorname{Li}(x) - \sum_{\operatorname{Im}(\rho)>0} \left(\operatorname{Li}(x^\rho) + \operatorname{Li}\left(x^{1-\rho}\right)\right) + \int_x^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-2n-1}}{\log z} dz - \log 2 \end{aligned}$$

ya que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-2n-1}}{\log z} = \frac{1}{z \log z} \sum_{n=1}^{\infty} z^{-2n}$$

es uniformemente convergente en (x, ∞), pues está acotada por la serie $\sum x^{-2n}$ que es una geométrica convergente. La serie vale $\left(1 - z^2\right)^{-1}$ al ser una geométrica y así llegamos a la fórmula final que obtiene Riemann [13, línea 100 y ecuación A.44]:

$$J(x) = \operatorname{Li}(x) - \sum_{\operatorname{Im}(\rho)>0} \left(\operatorname{Li}(x^\rho) + \operatorname{Li}\left(x^{1-\rho}\right)\right) + \int_x^\infty \frac{dt}{t\left(1-t^2\right)\log t} - \log 2.$$

Hay dos problemas con esta expresión. El primero lo admite Riemann: la justificación del intercambio de la serie con la derivada e integral

$$-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{s} \sum_\rho \log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \right\} x^s ds = -\sum_\rho \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{s} \log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \right\} x^s ds$$

no lo ha escrito y dice que mediante una discusión más a fondo de la función ξ se puede justificar el intercambio: “It may easily be shown, through a more thorough discussion of the function ξ,...” [13, líneas 102-103]. De hecho la parte difícil de este intercambio es que el dominio de integración no esta acotado [13, líneas 103-105 y ecuaciones A.45 y A.46].

El segundo problema con la expresión que obtiene Riemann para $J(x)$ es que al sustituir los valores $\beta = \rho$ y $\beta = 1 - \rho$ está asumiendo implícitamente que $0 \neq \mathrm{Re}(\rho)$ para todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$, pues las fórmulas para $f(\beta)$ son para el semiplano $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ *sin* incluir $\mathrm{Re}(\beta) = 0$. Esto no lo menciona Riemann y sí es un problema formal con esta fórmula. Este error ya lo había cometido Riemann anteriormente lo cual sugiere que sabía que lo estaba asumiendo sin probar.

2.7. La fórmula para $\pi(x)$ y las conclusiones de Riemann

Ya calculamos todas las integrales que aparecen en la expresión de $J(x)$ y obtuvimos la fórmula para $x > 1$

$$J(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\mathrm{Im}(\rho)>0} \left[\mathrm{Li}\left(x^{\rho}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{1-\rho}\right)\right] + \int_x^\infty \frac{dt}{t\left(t^2-1\right)\log t} - \log 2 \tag{2.7.1}$$

donde las ρ’s corren sobre los ceros no triviales de $\zeta(s)$.

Este era el propósito principal del artículo y con lo último que ya se obtuvo Riemann puede deducir una fórmula analítica para la función contadora de primos. Él toma la relación (que deducimos en la fórmula 1.3.7) y la invierte [13, líneas 107-108] para obtener:

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J\left(x^{1/n}\right)$$

que nosotros deducimos cuidadosamente en el Teorema 4. Observemos que la ‘serie’ en realidad es una suma finita porque $x^{1/n} < 2$ cuando $n \to \infty$ y el resto de los sumandos son cero. Esto sucede cuando $\log x / \log 2 < n$, si denotamos $N_x = \lfloor \log x / \log 2 \rfloor$, ya que al sustituir nuestra fórmula analítica para $J(x)$, en la fórmula para $\pi(x)$ obtenemos el resultado principal del artículo de Riemann:

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{N_x} \frac{\mu(n)}{n} \left(\mathrm{Li}\left(x^{1/n}\right) - \sum_{\mathrm{Im}(\rho)>0} \left[\mathrm{Li}\left(x^{\rho/n}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{(1-\rho)/n}\right)\right] + \int_{x^{1/n}}^\infty \frac{dt}{t\left(t^2-1\right)\log t} - \log 2 \right).$$

Como la fórmula es muy complicada para su análisis en el estado actual, especialmente en los términos que él llama periódicos (de hecho llama a los demás términos “non-periodic” [13, línea 116]) que son los términos que dependen de los ceros no triviales de $\zeta(s)$, Riemann decide analizar la densidad de los primos en la recta numérica y luego aproximarlos. Esto implica estudiar la derivada de $J(x)$.

Antes de estudiar la derivada, primero veamos qué sucede con los términos individuales de la expresión de $J(x)$ y sus comportamientos cerca de ∞. Cada término en la fórmula final de $J(x)$ actúa distinto cuando $x \to \infty$. El término constante $-\log 2$ obviamente no cambia y la integral

$$\int_x^\infty \frac{dt}{t\left(t^2-1\right)\log t}$$

decrece cuando $x \to \infty$ porque el dominio de integración se hace más pequeño y eliminar este término para dar una aproximación de $\pi(x)$ es justificable porque la integral vale muy poco:[12]

$$\int_x^\infty \frac{dt}{t\left(t^2-1\right)\log t} \leq \int_2^\infty \frac{dt}{t\left(t^2-1\right)\log t} \approx 0{,}14001....$$

En la sección 1.5 vimos que $\mathrm{Li}(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ por lo menos a la velocidad que lo hace $\log x$

Ahora, los términos de la forma $\mathrm{Li}(x^{\rho})$ oscilan con respecto de ρ porque los ceros ρ tienen parte real acotada $0 \leq \mathrm{Re}(\rho) \leq 1$ y sus partes imaginarias crecen y decrecen a ∞ y a $-\infty$ de manera oscilatoria (porque apareamos los ceros ρ con $1 - \rho$).

[12] Esto se puede calcular usando cualquier método numérico para aproximar integrales o se puede observar que la cola de la integral está dominada por t^{-3} y que $\int_2^\infty t^{-3} dt = \frac{1}{8} = 0{,}125$ da una aproximación débil.

Para ver el comportamiento de $\mathrm{Li}(x^\rho)$ con respecto de x, fijamos un cero ρ, consideramos $x > 4$ y recordemos que

$$\mathrm{Li}\,(x^\rho) = i\pi + \int_{C^+} \frac{t^{\rho-1}}{\log t} dt$$

en el primer cuadrante $0 < \mathrm{Re}\,(\rho)\,, \mathrm{Im}\,(\rho)$. Ahora, hacemos $u = \frac{1}{\log t}$ con $du = \frac{-dt}{t\log^2 t}$ y $dv = t^{\rho-1}dt$ con $v = t^\rho/\rho$ y obtenemos:

$$\mathrm{Li}\,(x^\rho) = i\pi + \left[\frac{t^\rho}{\rho \log t}\right]_{C^+} + \int_{C^+} \frac{t^\rho dt}{\rho t \log^2 t}.$$

El primer término depende de los extremos que son $t = 0, x$. Pero cuando $t \to 0^+$, el denominador $\log t$ tiende a $-\infty$ exponencialmente mientras que el numerador tiene exponente con parte real no negativa, entonces éste tiende a cero. Por lo tanto cuando $t \to 0^+$ se hace cero el cociente y así obtenemos la expresión

$$\mathrm{Li}\,(x^\rho) = i\pi + \frac{x^\rho}{\rho \log x} + \int_{C^+} \frac{t^{\rho-1} dt}{\rho \log^2 t}.$$

Ahora dividimos el contorno C^+ en dos arcos, el primero es todo el recorrido original hasta $t = 2$ y después es la recta sobre el eje real de 2 a x. Entonces tenemos

$$\mathrm{Li}\,(x^\rho) = i\pi + \frac{x^\rho}{\rho \log x} + \int_{C^+} \frac{t^{\rho-1} dt}{\rho \log^2 t} + \int_2^x \frac{t^{\rho-1} dt}{\rho \log^2 t},$$

pero la primera integral es convergente pues el integrando es analítico sobre C^+ (hasta $t = 2$), por lo tanto la primera integral es una constante con respecto de x; esta constante junto con $i\pi$ la llamaremos K. Por lo tanto tenemos

$$\mathrm{Li}\,(x^\rho) = \frac{x^\rho}{\rho \log x} + \int_2^x \frac{t^{\rho-1} dt}{\rho \log^2 t} + K.$$

La integral que queda, como $x > 4$, la separamos en dos intervalos $\left[2, x^{1/2}\right]$ y $\left[x^{1/2}, x\right]$. Ahora vemos qué sucede con la norma de esta integral (escribimos $\sigma = \mathrm{Re}\,(\rho)$ y $\tau = \mathrm{Im}\,(\rho)$):

$$\begin{aligned} \left| \int_2^{x^{1/2}} \frac{t^{\rho-1} dt}{\rho \log^2 t} + \int_{x^{1/2}}^x \frac{t^{\rho-1} dt}{\rho \log^2 t} \right| \quad &\leq \quad \int_2^{x^{1/2}} \left| \frac{t^{\rho-1}}{\rho \log^2 t} \right| dt + \int_{x^{1/2}}^x \left| \frac{t^{\rho-1}}{\rho \log^2 t} \right| dt \\ &\leq \quad \int_2^{x^{1/2}} \frac{t^{\sigma-1}}{|\rho|\, |\log t|^2} dt + \int_{x^{1/2}}^x \frac{t^{\sigma-1}}{|\rho|\, |\log t|^2} dt. \end{aligned} \tag{2.7.2}$$

Aquí sabemos que t es un real mayor que 2, entonces todos los términos son positivos y así quitamos los valores absolutos. Por otro lado, el integrando de la primera integral la acotamos por

$$\frac{t^{\sigma-1}}{|\rho| \log^2 t} \leq \frac{t^{\sigma-1}}{|\rho| \log^2 2}$$

en el intervalo $\left[2, x^{1/2}\right]$. Lo mismo hacemos con el otro integrando:

$$\frac{t^{\sigma-1}}{|\rho| \log^2 t} \leq \frac{t^{\sigma-1}}{|\rho| \log^2 \left(x^{1/2}\right)}.$$

Entonces 2.7.2 nos queda

$$\begin{aligned}
&\left|\int_2^{x^{1/2}} \frac{t^{\rho-1}dt}{\rho\log^2 t} + \int_{x^{1/2}}^{x} \frac{t^{\rho-1}dt}{\rho\log^2 t}\right| \\
&\leq \int_2^{x^{1/2}} \frac{t^{\sigma-1}}{|\rho|\log^2 2}dt + \int_{x^{1/2}}^{x} \frac{t^{\sigma-1}}{|\rho|\log^2\left(x^{1/2}\right)}dt \\
&\leq \frac{1}{|\rho|\log^2 2}\int_2^{x^{1/2}} t^{\sigma-1}dt + \frac{1}{|\rho|\log^2\left(x^{1/2}\right)}\int_{x^{1/2}}^{x} t^{\sigma-1}dt \\
&\leq \frac{1}{|\rho|\log^2 2}\left[\frac{t^\sigma}{\sigma}\right]_2^{x^{1/2}} + \frac{1}{|\rho|\log^2\left(x^{1/2}\right)}\left[\frac{t^\sigma}{\sigma}\right]_{x^{1/2}}^{x} \\
&\leq \frac{x^{\sigma/2}}{\sigma\,|\rho|\log^2 2} - \frac{2^{\sigma/2}}{\sigma\,|\rho|\log^2 2} + \frac{x^{\sigma}}{\sigma\,|\rho|\log^2\left(x^{1/2}\right)} - \frac{x^{\sigma/2}}{\sigma\,|\rho|\log^2\left(x^{1/2}\right)}.
\end{aligned}$$

Si eliminamos los términos negativos, seguimos acotando por arriba, entonces

$$\left|\int_2^{x} \frac{t^{\rho-1}dt}{\rho\log^2 t}\right| \leq \frac{x^{\sigma/2}}{\sigma\,|\rho|\log^2 2} + \frac{x^{\sigma}}{\sigma\,|\rho|\,\frac{1}{4}\log^2(x)}.$$

Sabemos que $\operatorname{Re}(\rho) < |\rho|$ entonces podemos acotar más. Denotamos $K_1 = (\sigma\log 2)^{-2}$ y $K_2 = 4\sigma^{-2}$ y concluimos

$$\left|\int_2^{x} \frac{t^{\rho-1}dt}{\rho\log^2 t}\right| \leq K_1 x^{\sigma/2} + K_2\frac{x^{\sigma}}{\log^2(x)}.$$

También sabemos que el término $x^\rho/\rho\log x$ de $\operatorname{Li}(x^\rho)$ crece más rápido que lo anterior cuando $x \to \infty$, i.e.

$$x^{\sigma/2} + \frac{x^\sigma}{\log^2(x)} \ll \left|\frac{x^\rho}{\rho\log x}\right| = \frac{x^\sigma}{|\rho|\log x}$$

entonces podemos decir que el término $x^\rho/\rho\log x$ de $\operatorname{Li}(x^\rho)$ domina:

$$\operatorname{Li}(x^\rho) \approx \frac{x^\rho}{\rho\log x}.$$

Para argumentar la periodicidad de estos términos, como le llama Riemann, consideremos

$$\operatorname{Li}(x^\rho) \approx \frac{x^\rho}{\rho\log x} = \frac{x^\sigma}{\rho\log x}e^{i\tau\log x}. \tag{2.7.3}$$

Lo primero que podemos observar es que cuando $x \to \infty$ se tiene:

$$\frac{x^\sigma}{\log x} \to \infty$$

pues $\sigma > 0$ (otra vez estamos usando el hecho que $\operatorname{Re}(\rho) \neq 1$). Ahora como $x \to \infty$ entonces el factor $e^{i\tau\log x}$ va rotando el cociente indefinidamente pero como el cociente se hace muy grande, para las x grandes las oscilaciones son muy notables.

Ya tenemos el comportamiento de todos los términos de $J(x)$ cerca de ∞. Los últimos dos términos de $J(x)$ en 2.7.1 están acotados entonces no alteran el comportamiento de $J(x)$ cerca de ∞. Por lo tanto usamos sólo los primeros dos términos para aproximar a $J(x)$:

$$J(x) \approx \operatorname{Li}(x) - \sum_{\operatorname{Im}(\rho)>0}\left[\operatorname{Li}(x^\rho) + \operatorname{Li}\left(x^{1-\rho}\right)\right] \tag{2.7.4}$$

Riemann da una fórmula para *aproximar* la derivada de $J(x)$ [13, líneas 113-114] que por definición es la medida dJ que mide: la densidad de los primos más un medio de la densidad de los cuadrados de los primos más una tercera parte de la densidad de los cubos de los números primos etc. Una forma de ver este hecho es que el cociente $\pi(x)/x$ nos dice cuántos primos hay a lo largo del intervalo $[0, x]$ es decir qué tan densos son los primos en ese intervalo por unidad de longitud. Entonces si hacemos el 'cociente' infinitesimal $d\pi(x)/dx$ obtenemos una función que nos regresa la densidad puntual de primos en cierto punto x de la recta real. Si llevamos este argumento a $J(x)$, obtenemos justo lo que argumenta Riemann.

Dice que la expresión A.49

> 113 gives an approximating expression for the density of the prime number + half the density of the squares
> 114 of the prime numbers + a third of the density of the cubes of the prime numbers etc. at the magnitude x.

Por lo que acabamos de argumentar, Riemann está afirmando que la expresión A.49 es una aproximación para $dJ(x)/dx$. Antes de derivar, Riemann trunca la serie a una suma finita para poder derivar término a término [13, línea 111]. Tampoco deriva todos los términos de la fórmula para $J(x)$ (ecuación 2.7.1 o ecuación A.44 del artículo) porque vimos que los últimos dos términos no afectan el comportamiento de $J(x)$ cuando $x \to \infty$.

Para verificar A.49 derivamos la aproximación 2.7.4. Primero, sabemos que por el Teorema fundamental del cálculo (y aprovechándonos de la notación) tenemos que el primer término para dJ es

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Li}(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{dt}{\log t} = \frac{1}{\log x} - \frac{1}{\log 0} = \frac{1}{\log x}.$$

Por último derivamos la suma finita término a término. Cada término es de la forma:

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{Li}\left(x^{\rho}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{1-\rho}\right)\right) = \frac{x^{\rho-1}}{\log x} + \frac{x^{-\rho}}{\log x}.$$

Con esto obtenemos:

$$\frac{d}{dx}J(x) \approx \frac{1}{\log x} + \sum_{\rho}\left[\frac{x^{\rho-1}}{\log x} + \frac{x^{-\rho}}{\log x}\right].$$

Si queremos reescribir esta aproximación de la misma manera que la escribe Riemann, sólo hay que escribir $\rho = \frac{1}{2} + i\alpha$, entonces

$$x^{\rho-1} + x^{-\rho} = x^{-\frac{1}{2}+i\alpha} + x^{-\frac{1}{2}-i\alpha} = \frac{x^{i\alpha} + x^{-i\alpha}}{x^{1/2}} = \frac{e^{i\alpha\log x} + e^{-i\alpha\log x}}{x^{1/2}}$$

y con la definición del coseno en $\mathbb{C}$ concluimos:

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{Li}\left(x^{\rho}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{1-\rho}\right)\right) = \frac{2\cos\left(\alpha\log x\right)}{\sqrt{x}\log x}.$$

Con esta identidad obtenemos A.49:

$$\frac{d}{dx}J(x) \approx \frac{1}{\log x} + 2\sum_{\alpha}\frac{\cos\left(\alpha\log x\right)}{\sqrt{x}\log x}.$$

Después Riemann afirma [13, líneas 115-117] que, gracias a la aproximación anterior, la aproximación que había dado Gauss, i.e. $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$ es adecuada hasta cantidades de orden $x^{1/2}$ porque los términos principales no-periódicos de la aproximación:

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu\left(n\right)}{n}J\left(x^{1/n}\right) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu\left(n\right)}{n}\left[\mathrm{Li}(x) - \sum_{\mathrm{Im}(\rho)>0}\left[\mathrm{Li}\left(x^{\rho}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{1-\rho}\right)\right]\right]$$

determinan el comportamiento de $\pi(x)$, es decir

$$\pi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu\left(n\right)}{n}\mathrm{Li}\left(x^{1/n}\right) = \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}\left(x^{1/2}\right) - \frac{1}{3}\mathrm{Li}\left(x^{1/3}\right) - \cdots,$$

y la aproximación $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$ falla cuando $x^{1/2}$ es muy grande porque el término $\frac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{1/2})$ afecta significativamente el valor de $\pi(x)$.

De hecho, Riemann verifica computacionalmente que su nueva aproximación

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}\left(x^{1/2}\right) - \frac{1}{3}\mathrm{Li}\left(x^{1/3}\right) - \frac{1}{5}\mathrm{Li}\left(x^{1/5}\right) + \frac{1}{6}\mathrm{Li}\left(x^{1/6}\right) - \frac{1}{7}\mathrm{Li}\left(x^{1/7}\right) \cdots ,$$

efectivamente le indica que la de Gauss, $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$, no es adecuada porque siempre da valores más grandes que $\pi(x)$ [13, líneas 118-120]. El trabajo computacional que cita para estos argumentos fue un trabajo de Gauss y Goldschmidt. De hecho, la presencia de muchos sumando negativos en su nueva aproximación de $\pi(x)$, le sugiere a Riemann que $\mathrm{Li}(x)$ *siempre* da valores más grandes que $\pi(x)$.[13]

Por último, Riemann menciona que las fluctuaciones que causan los términos $\mathrm{Li}(x^{\rho})$ en la densidad de los primos en ciertas regiones de la recta numérica le ha llamado la atención [13, líneas 121-122].

A lo que se refiere es que si tomamos un intervalo $[a, b]$ de números grandes entonces $J(b) - J(a)$ cuenta la cantidad de primos (y diferentes potencias de primos) que hay en el intervalo $[a, b]$, pero si queremos aproximar esta cantidad con la aproximación A.49, necesitamos integrar la densidad $dJ(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$:

$$\begin{aligned} \int_a^b dJ &\approx \int_a^b \frac{1}{\log t} dt - \sum_{\alpha} \int_a^b \frac{2\cos(\alpha \log t)}{\sqrt{t}\log t} dt \\ &\approx \mathrm{Li}\,(b) - \mathrm{Li}\,(a) - \sum_{\alpha} \int_a^b \frac{2\cos(\alpha \log t)}{\sqrt{t}\log t} dt. \end{aligned}$$

Como el término $\mathrm{Li}\,(b) - \mathrm{Li}\,(a)$ ya aproxima $J(b) - J(a)$, el término que depende de los términos periódicos

$$\sum_{0<\mathrm{Re}(\alpha)<M} \int_a^b \frac{2\cos(\alpha \log t)}{\sqrt{t}\log t} dt$$

produce las fluctuaciones en la aproximación de $J(x)$ con 2.7.4 [13, líneas 121-122].

Riemann menciona que estas fluctuaciones han causado interés pero que todavía no se ha encontrado una ley que las describa. Por eso sugiere que en los próximos trabajos de conteo para verificar las aproximaciones que dió, se calcule el efecto directo de los términos $\mathrm{Li}(x^{\beta})$ sobre la aproximación 2.7.4 [13, líneas 123-124]. Al final, Riemann sugiere estudiar la función $J(x)$ en lugar de $\pi(x)$ porque el comportamiento de $J(x)$ (y de su aproximación) es más regular que el comportamiento de $\pi(x)$. Esta diferencia de comportamiento se debe a la fórmula que relaciona $J(x)$ con $\pi(x)$.

Aquí termina el artículo de Riemann, pero regresemos a los últimos dos párrafos porque deja sin resolver un problema importante de los números primos. Aproximar de manera correcta la función $\pi(x)$ siempre fue un problema importante en la teoría de números y al final de su artículo, sólo menciona, sin demostrar, que pudo encontrar una mejor aproximación que Gauss, pero nunca demuestra que efectivamente la aproximación que da es la mejor.

El teorema fundamental de los números primos dice que el error relativo de la aproximación

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

se hace cero cuando $x \to \infty$. Al final del artículo, parece que Riemann esta muy cerca de demostrar este hecho. La aproximación

$$\mathrm{Li}(x^{\rho}) \approx \frac{x^{\rho}}{\rho \log x}$$

junto con la aproximación 2.7.4 nos da:

$$J(x) \approx \frac{x}{\log x} + \sum_{\mathrm{Im}(\rho)>0} \left[\frac{x^{\rho}}{\rho \log x} + \frac{x^{1-\rho}}{(1-\rho)\log x} \right].$$

[13] Computacionalmente sólo se había visto que $\pi(x) < \mathrm{Li}(x)$ en la época de Riemann. Se conjeturaba que la aproximación de Gauss *siempre* era mayor que $\pi(x)$, pero en 1914, Littlewood demostró que había una infinidad de cambios de signo en la función $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$, i.e. era false la conjetura. Hasta ahora se sabe que el primer cambio de signo, o el primer número donde $\pi(x) > \mathrm{Li}(x)$ está entre $10^{14} < x < 1{,}4 \times 10^{316}$. [2]

Sabemos que $0 \leq \text{Re}(\rho) = \sigma \leq 1$, entonces podemos reescribir la aproximación anterior con σ y $1-\sigma$ en los exponentes de los numeradores de los sumandos de la serie.

Intuitivamente, si ninguna σ ó $1-\sigma$ se hace uno, entonces *todos* los sumandos de la serie tienen orden estrictamente menor que el primer término de la aproximación anterior. Entonces podríamos deducir que el término dominante de la aproximación es

$$J(x) \approx \frac{x}{\log x}.$$

Como $J(x)$ y $\pi(x)$ tienen el mismo orden, habremos demostrado el teorema fundamental de los números primos.

Para esta demostración, es *necesario* que los ceros no triviales de $\zeta(s)$ no tengan parte real igual a uno. Este hecho, junto con el teorema fundamental de los números primos lo demostraron, independientemente, Hadamard y de la Vallée Poussin. Entonces, dado el propósito de los últimos dos párrafos del artículo, podemos pensar que Riemann dejó inconclusa la demostración del teorema fundamental de los números primos y sugirió un estudio más profundo de los ceros no triviales de $\zeta(s)$ para poder controlar los términos periódicos de su aproximación.

Volvió a surgir el problema abierto que dejó Riemann: los ceros ρ no triviales de $\zeta(s)$ cumplen $\text{Re}(\rho) \neq 1$, entonces vale la pena enlistar los problemas que dejó Riemann sin resolver:

1. $\text{Re}(\rho) \neq 1$ para todo cero no trivial de $\zeta(s)$ (y el teorema fundamental de los números primos).
2. La función $N(T)$ (de la sección 2.5) aproxima la cantidad de ceros de $\xi(t)$ en el rectángulo R_T.
3. La función $\hat{N}(T)$ aproxima la cantidad de ceros de $\xi(t)$ en la recta real entre 0 y T.
4. Todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$ tienen parte real igual a $\frac{1}{2}$.
5. La fórmula del producto de $\xi(t)$ converge y coincide (salvo en una constante) con $\xi(t)$.
6. El intercambio de la derivada con la serie en la integral 2.6.11 es válida.

El primero lo demostraron Hadamard y de la Vallée Poussin. El segundo lo demostró von Mangoldt [15] en 1905. El tercero no se ha resuelto. El cuarto es la hipótesis de Riemann. El quinto lo demostró Hadamard al desarrollar la teoría de las funciones enteras [8] y el sexto lo demostró von Mangoldt en 1895 [14].

A pesar de estos seis problemas que no demostró, Riemann sí logró el propósito de su artículo: encontrar una función que diera "la cantidad de números primos menores que una magnitud dada." Esta fórmula no esta formalmente demostrada pero las herramientas que introdujo Riemann y las matemáticas que produjo este artículo son indudablemente importantes.

Con su artículo, Riemann introdujo métodos matemáticos que cambiaron la manera en la que se pensaba que el problema de los números primos podra ser abordado, y precisamente en estos métodos es donde ya pudimos ver que radica la grandeza de este trabajo de Riemann.

Inicia con el producto de Euler que da una relación estrecha entre los números primos y la función $\zeta(s)$. Gracias a esta relación y a la extensión analítica del producto de Euler, Remann creó una de las funciones más importantes y vigentes en la teoría de los números: la función zeta de Riemann. El estudio de esta función produjo una cantidad de avances que ocuparon el tiempo de muchos grandes matemáticos durante años después de la publicación del artículo. Después de leer el artículo uno concluye inmediatamente la importancia de este artículo y la importancia de leer la versión original de Riemann.

Bibliografía

[1] Ahlfors, L. *Complex Analysis.* McGraw-Hill, 1966.

[2] Bays, C., and Hudson, R. A new bound for the smallest x with $\pi(x) > \mathrm{Li}(x)$. *Math. Comp. 69* (2000), 1285–1296.

[3] de la Vallee Poussin, C.-J. Recherches analytiques sur la théorie des nombres (premiere partie). *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* (1896), 183–256.

[4] Edwards, H. M. *Riemann's Zeta Function.* Dover Publications; Dover Ed edition, 2001.

[5] Euler, L. De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt. *Comm. Acad. Sci. Petropoltanae* (1738), 36–57.

[6] Euler, L. Variae observations circa series infinitas. *Comm. Acad. Sci. Petropoltanae* (1744), 160–188.

[7] Euler, L., and Goldbach, C. *Leonhard Euler und Christian Goldbach: Briefwechsel 1729-1764.* Berlin: Akademie-Verlag, 1965.

[8] Hadamard, J. Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par riemann. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (1893), 171–216.

[9] Hadamard, J. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. *Bulletin de la Société Mathématique de France 24* (1896), 199–220.

[10] Jacobi, C. *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum.* Cambridge Library Collection, 2012. fecha original: 1829.

[11] Lindelof, E. Robert hjalmar mellin. *Acta Mathematica* (1933), i–vi. H. Mellin's notice and bibliography.

[12] Mellin, H. Die dirichlet'schen reihen, die zahlentheoretischen funktionen und die unendlichen produkte von endlichem geschlecht. *Acta Mathematica 28*, 1 (1904), 37–64.

[13] Riemann, B. Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grösse. *Monatsberichte der Berliner Akademie* (1859), 671–680.

[14] von Mangoldt, H. Zu riemanns abhandlung üeber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grösse". *Journal für die reine und angewandte Mathematik 114* (1895), 255–305.

[15] von Mangoldt, H. Zur verteilung der nullstellen der riemannschen funktion (t). *Mathematische Annalen 60*, 1 (1905), 1–19.

Apéndice A

El artículo de Riemann

On the Number of Prime Numbers less than a Given Quantity.

(Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.)

Bernhard Riemann

[Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.]

Translated by David R. Wilkins

Preliminary Version: December 1998

I believe that I can best convey my thanks for the honour which the Academy has to some degree conferred on me, through my admission as one of its correspondents, if I speedily make use of the permission thereby received to communicate an investigation into the accumulation of the prime numbers; a topic which perhaps seems not wholly unworthy of such a communication, given the interest which *Gauss* and *Dirichlet* have themselves shown in it over a lengthy period.

For this investigation my point of departure is provided by the observation of *Euler* that the product

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s}, \tag{A.1}$$

if one substitutes for p all prime numbers, and for n all whole numbers. The function of the complex variable s which is represented by these two expressions, wherever they converge, I denote by $\zeta(s)$. Both expressions converge only when the real part of s is greater than 1; at the same time an expression for the function can easily be found which always remains valid.

On making use of the equation

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\,dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s} \tag{A.2}$$

one first sees that

$$\Pi(s-1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1}. \tag{A.3}$$

If one now considers the integral

$$\int \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x-1} \tag{A.4}$$

from $+\infty$ to $+\infty$ taken in a positive sense around a domain which includes the value 0 but no other point of discontinuity of the integrand in its interior, then this is easily seen to be equal to

$$(e^{-\pi s i} - e^{\pi s i}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1}, \tag{A.5}$$

provided that, in the many-valued function $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$, the logarithm of $-x$ is determined so as to be real when x is negative. Hence

$$2\sin \pi s\, \Pi(s-1)\zeta(s) = i \int_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x-1}, \tag{A.6}$$

where the integral has the meaning just specified.

This equation now gives the value of the function $\zeta(s)$ for all complex numbers s and shows that this function is one-valued and finite for all finite values of s with the exception of 1, and also that it is zero if s is equal to a negative even integer.

If the real part of s is negative, then, instead of being taken in a positive sense around the specified domain, this integral can also be taken in a negative sense around that domain containing all the remaining complex quantities, since the integral taken though values of infinitely large modulus is then infinitely small. However, in the interior of this domain, the integrand has discontinuities only where x becomes equal to a whole multiple of $\pm 2\pi i$, and the integral is thus equal to the sum of the integrals taken in a negative sense around these values. But the integral around the value $n2\pi i$ is $= (-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$, one obtains from this

$$2\sin \pi s\, \Pi(s-1)\zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1}((-i)^{s-1} + i^{s-1}), \tag{A.7}$$

thus a relation between $\zeta(s)$ and $\zeta(1-s)$, which, through the use of known properties of the function Π, may be expressed as follows:

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) \tag{A.8}$$

remains unchanged when s is replaced by $1-s$.

This property of the function induced me to introduce, in place of $\Pi(s-1)$, the integral $\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)$ into the general term of the series $\sum \frac{1}{n^s}$, whereby one obtains a very convenient expression for the function $\zeta(s)$. In fact

$$\frac{1}{n^s}\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty e^{-nn\pi x} x^{\frac{s}{2}-1}\,dx, \tag{A.9}$$

thus, if one sets

$$\sum_1^\infty e^{-nn\pi x} = \psi(x) \tag{A.10}$$

then

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1}\,dx, \tag{A.11}$$

or since

$$2\psi(x)+1 = x^{-\frac{1}{2}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right), \text{ (Jacobi, Fund. S. 184)} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned} \Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) &= \int_1^\infty \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1}\,dx + \int_1^\infty \psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{\frac{s-3}{2}}\,dx \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right)dx \qquad \text{(A.13)} \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx. \qquad \text{(A.14)} \end{aligned}$$

I now set $s = \frac{1}{2} + ti$ and

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(t), \tag{A.15}$$

so that

$$\xi(t) = \tfrac{1}{2} - (tt + \tfrac{1}{4})\int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos(\tfrac{1}{2}t\log x)\,dx \tag{A.16}$$

or, in addition,

$$\xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x))}{dx} x^{-\frac{1}{4}} \cos(\tfrac{1}{2}t\log x)\,dx. \tag{A.17}$$

This function is finite for all finite values of t, and allows itself to be developed in powers of tt as a very rapidly converging series. Since, for a value of s whose real part is greater than 1, $\log\zeta(s) = -\sum\log(1-p^{-s})$ remains finite, and since the same holds for the logarithms of the other factors of $\xi(t)$, it follows that the function $\xi(t)$ can only vanish if the imaginary part of t lies between $\frac{1}{2}i$ and $-\frac{1}{2}i$. The number of roots of $\xi(t)=0$, whose real parts lie between 0 and T is approximately

$$= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}; \tag{A.18}$$

because the integral $\int d\log\xi(t)$, taken in a positive sense around the region consisting of the values of t whose imaginary parts lie between $\frac{1}{2}i$ and $-\frac{1}{2}i$ and whose real parts lie between 0 and T, is (up to a fraction of the order of magnitude of the quantity $\frac{1}{T}$) equal to $\left(T\log\frac{T}{2\pi} - T\right)i$; this integral however is equal to the number of roots of $\xi(t)=0$ lying within in this region, multiplied by $2\pi i$. One now finds indeed approximately this number of real roots within these limits, and it is very probable that all roots are real. Certainly one would wish for a stricter proof here; I have meanwhile temporarily put aside the search for this after some fleeting futile attempts, as it appears unnecessary for the next objective of my investigation.

If one denotes by α all the roots of the equation $\xi(\alpha)=0$, one can express $\log\xi(t)$ as

$$\sum \log\left(1-\frac{tt}{\alpha\alpha}\right)+\log\xi(0); \tag{A.19}$$

for, since the density of the roots of the quantity t grows with t only as $\log\frac{t}{2\pi}$, it follows that this expression converges and becomes for an infinite t only infinite as $t\log t$; thus it differs from $\log\xi(t)$ by a function of tt, that for a finite t remains continuous and finite and, when divided by tt, becomes infinitely small for infinite t. This difference is consequently a constant, whose value can be determined through setting $t=0$.

With the assistance of these methods, the number of prime numbers that are smaller than x can now be determined.

Let $F(x)$ be equal to this number when x is not exactly equal to a prime number; but let it be greater by $\frac{1}{2}$ when x is a prime number, so that, for any x at which there is a jump in the value in $F(x)$,

$$F(x)=\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}. \tag{A.20}$$

If in the identity

$$\log\zeta(s)=-\sum\log(1-p^{-s})=\sum p^{-s}+\tfrac{1}{2}\sum p^{-2s}+\tfrac{1}{3}\sum p^{-3s}+\cdots \tag{A.21}$$

one now replaces

$$p^{-s}\text{ by } s\int_p^\infty x^{-s-1}\,ds,\quad p^{-2s}\text{ by } s\int_{p^2}^\infty x^{-s-1}\,ds,\ldots, \tag{A.22}$$

one obtains

$$\frac{\log\zeta(s)}{s}=\int_1^\infty f(x)x^{-s-1}\,dx, \tag{A.23}$$

if one denotes

$$F(x)+\tfrac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}})+\tfrac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}})+\cdots \tag{A.24}$$

by $f(x)$.

This equation is valid for each complex value $a+bi$ of s for which $a>1$. If, though, the equation

$$g(s)=\int_0^\infty h(x)x^{-s}\,d\log x \tag{A.25}$$

holds within this range, then, by making use of *Fourier*'s theorem, one can express the function h in terms of the function g. The equation decomposes, if $h(x)$ is real and

$$g(a+bi)=g_1(b)+ig_2(b), \tag{A.26}$$

into the two following:

$$g_1(b)=\int_0^\infty h(x)x^{-a}\cos(b\log x)\,d\log x, \tag{A.27}$$

$$ig_2(b)=-i\int_0^\infty h(x)x^{-a}\sin(b\log x)\,d\log x. \tag{A.28}$$

If one multiplies both equations with

$$(\cos(b\log y) + i\sin(b\log y))\,db \tag{A.29}$$

and integrates them from $-\infty$ to $+\infty$, then one obtains $\pi h(y)y^{-\alpha}$ on the right hand side in both, on account of *Fourier*'s theorems; thus, if one adds both equations and multiplies them by iy^{α}, one obtains

$$2\pi i h(y) = \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s)y^s\,ds, \tag{A.30}$$

where the integration is carried out so that the real part of s remains constant.

For a value of y at which there is a jump in the value of $h(y)$, the integral takes on the mean of the values of the function h on either side of the jump. From the manner in which the function f was defined, we see that it has the same property, and hence in full generality

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log\zeta(s)}{s} y^s\,ds. \tag{A.31}$$

One can substitute for $\log\zeta$ the expression

$$\frac{s}{2}\log\pi - \log(s-1) - \log\Pi\left(\frac{s}{2}\right) + \sum\nolimits^{\alpha}\log\left(1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right) + \log\xi(0) \tag{A.32}$$

found earlier; however the integrals of the individual terms of this expression do not converge, when extended to infinity, for which reason it is appropriate to convert the previous equation by means of integration by parts into

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\frac{\log\zeta(s)}{s}}{ds} x^s\,ds \tag{A.33}$$

Since

$$-\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right) = \text{lím}\left(\sum_{n=1}^{n=m}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right) - \frac{s}{2}\log m\right), \tag{A.34}$$

for $m = \infty$ and therefore

$$-\frac{d\frac{1}{s}\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right)}{ds} = \sum_{1}^{\infty}\frac{d\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)}{ds}, \tag{A.35}$$

it then follows that all the terms of the expression for $f(x)$, with the exception of

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{ss}\log\xi(0)x^s\,ds = \log\xi(0), \tag{A.36}$$

take the form

$$\pm\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}x^s\,ds. \tag{A.37}$$

But now

$$\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{d\beta} = \frac{1}{(\beta - s)\beta}, \tag{A.38}$$

and, if the real part of s is larger than the real part of β,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^s\,ds}{(\beta-s)\beta}=\frac{x^\beta}{\beta}=\int\limits_{\infty}^{x}x^{\beta-1}\,dx, \tag{A.39}$$

or

$$=\int\limits_{0}^{x}x^{\beta-1}\,dx, \tag{A.40}$$

depending on whether the real part of β is negative or positive. One has as a result

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}x^s\,ds$$

$$= \quad -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)x^s\,ds \tag{A.41}$$

$$= \quad \int\limits_{\infty}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}\,dx+\text{ const.} \tag{A.42}$$

in the first, and

$$=\int\limits_{0}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}\,dx+\text{ const.} \tag{A.43}$$

in the second case.

In the first case the constant of integration is determined if one lets the real part of β become infinitely negative; in the second case the integral from 0 to x takes on values separated by $2\pi i$, depending on whether the integration is taken through complex values with positive or negative argument, and becomes infinitely small, for the former path, when the coefficient of i in the value of β becomes infinitely positive, but for the latter, when this coefficient becomes infinitely negative. From this it is seen how on the left hand side $\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)$ is to be determined in order that the constants of integration disappear.

Through the insertion of these values in the expression for $f(x)$ one obtains

$$f(x)=Li(x)-\sum\nolimits^{\alpha}\left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)+\int\limits_{x}^{\infty}\frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{x\log x}+\log\xi(0), \tag{A.44}$$

if in $\sum^{\alpha}$ one substitutes for α all positive roots (or roots having a positive real part) of the equation $\xi(\alpha)=0$, ordered by their magnitude. It may easily be shown, by means of a more thorough discussion of the function ξ, that with this ordering of terms the value of the series

$$\sum\left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)\log x \tag{A.45}$$

agrees with the limiting value to which

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-bi}^{a+bi}\frac{d\frac{1}{s}\sum\log\left(1+\frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right)}{ds}x^s\,ds \tag{A.46}$$

converges as the quantity b increases without bound; however when re-ordered it can take on any arbitrary real value.

From $f(x)$ one obtains $F(x)$ by inversion of the relation

$$f(x) = \sum \frac{1}{n} F\left(x^{\frac{1}{n}}\right), \tag{A.47}$$

to obtain the equation

$$F(x) = \sum (-1)^{\mu} \frac{1}{m} f\left(x^{\frac{1}{m}}\right), \tag{A.48}$$

in which one substitutes for m the series consisting of those natural numbers that are not divisible by any square other than 1, and in which μ denotes the number of prime factors of m.

If one restricts $\sum^{\alpha}$ to a finite number of terms, then the derivative of the expression for $f(x)$ or, up to a part diminishing very rapidly with growing x,

$$\frac{1}{\log x} - 2\sum^{\alpha} \frac{\cos(\alpha \log x) x^{-\frac{1}{2}}}{\log x} \tag{A.49}$$

gives an approximating expression for the density of the prime number + half the density of the squares of the prime numbers + a third of the density of the cubes of the prime numbers etc. at the magnitude x.

The known approximating expression $F(x) = Li(x)$ is therefore valid up to quantities of the order $x^{\frac{1}{2}}$ and gives somewhat too large a value; because the non-periodic terms in the expression for $F(x)$ are, apart from quantities that do not grow infinite with x:

$$Li(x) - \tfrac{1}{2} Li(x^{\frac{1}{2}}) - \tfrac{1}{3} Li(x^{\frac{1}{3}}) - \tfrac{1}{5} Li(x^{\frac{1}{5}}) + \tfrac{1}{6} Li(x^{\frac{1}{6}}) - \tfrac{1}{7} Li(x^{\frac{1}{7}}) + \cdots \tag{A.50}$$

Indeed, in the comparison of $Li(x)$ with the number of prime numbers less than x, undertaken by *Gauss* and *Goldschmidt* and carried through up to $x =$ three million, this number has shown itself out to be, in the first hundred thousand, always less than $Li(x)$; in fact the difference grows, with many fluctuations, gradually with x. But also the increase and decrease in the density of the primes from place to place that is dependent on the periodic terms has already excited attention, without however any law governing this behaviour having been observed. In any future count it would be interesting to keep track of the influence of the individual periodic terms in the expression for the density of the prime numbers. A more regular behaviour than that of $F(x)$ would be exhibited by the function $f(x)$, which already in the first hundred is seen very distinctly to agree on average with $Li(x) + \log \xi(0)$.